ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ

ХРЕСТОМАТИЯ

По истории теории вероятностей и статистики
составитель и переводчик О. Б. Шейнин

Берлин
2019

Содержание

Предварительные замечания
Мы не указываем своего авторства (статьи **I, II, VII – X**)
I. К отбору и уравниванию непосредственных измерений, 1966
II. К истории уравнивания косвенных измерений, 1967
III. Морсбах, Генерал-лейтенант доктор Оскар Шрейбер, 1905
IV. Ф. Р. Гельмерт, Генерал-лейтенант доктор Оскар Шрейбер, 1905
V. А. Дмитриев, Статистики русского зарубежья, 1996
VI. Н. И. Идельсон, *Способ наименьших квадратов* … 1947
VII. К истории предельных теорем Муавра – Лапласа, 1970
VIII. Рефераты
IX. Подробные рефераты нескольких книг
X. Кандидатская диссертация, 1967

oscar.sheynin@gmail.com

Предварительные замечания

Во всём сборнике принято обозначение **S, G,** i: скачиваемый документ i на русском языке есть на нашем сайте www.sheynin.de. Сайт перепечатывает Google, см. Oscar Sheynin.

Мы сокращаем давно уже устаревший термин *математическое ожидание* и пишем просто *ожидание*. Этот устаревший термин ввёл Лаплас, чтобы отличить классическое ожидание от ставшего модным (но с тех пор забытым) морапьным ожиданием.

I

О. Б. Шейнин

К отбору и уравниванию непосредственных измерений

Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка, № 2, 1966, с. 107 – 112

Пусть $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ – результаты непосредственных измерений (вариационный ряд). Требуется выразить этот ряд одним числом x. Ниже рассмотрены основные применяемые на практике оценки x со специальным изучением истории вопроса.

Среднее арифметическое. Учение о средних величинах и в том числе о среднем арифметическом существовало уже в пифагорейской школе [9, с. 63]. Это среднее встречается в самых разнообразных формулах древности при подсчёте площадей фигур, объёмов тел. В индийском комментарии XIV в. [34, с. 97] говорилось, что чем больше (в разных местах) измерены длина, ширина и глубина земляной выемки, тем точнее определяются её размеры и объём. Формула для подсчёта площади четырёхугольного земельного участка как произведения полусумм его противоположных сторон применялась в древнем мире либо в случае не вполне точных прямоугольников, либо при уклонении противоположных сторон вследствие различного воздействия рельефа местности на линейные измерения [2, с. 204].

Итак, среднее арифметическое применялось для компенсации нестрогости формул, и, возможно, действия систематических ошибок измерения. Но кроме того *обычное* применение среднего арифметического при обработке рядов измерений стало универсальной оценкой в эпоху градусных измерений. Уже у Коперника [6, кн. 6, гл. 7] и Кеплера [22, гл. 10, § 10] и других учёных можно найти по нескольку строк, посвящённых среднему арифметическому. Коперник: если

Между крайними пределами измерений нет заметной разницы, безопаснее придерживаться средних.

Среднее арифметическое сыграло важную роль в выработке классического определения вероятности (Лейбниц [8, кн. 4, гл. 16]). Он же указывает на практику применения принципа среднего арифметического в сфере экономических отношений.

Был широко распространён обычай предварительного (до образования среднего) вывода попарных сочетаний измерений даже в случае непосредственных измерений. Так, Бошкович [29, с. 150] вывел четыре значения разности широт градусного измерения, образовал из них шесть попарных сочетаний и только

после этого получил (с дополнительным воздействием ошибок округления) среднюю разность. Видимо, рассмотрение отдельных сочетаний служило аналогом современного изучения уклонений x_i от среднего.

Специальные статьи вероятностному обоснованию принципа среднего арифметического посвятил Симпсон [32; 33]. Их непосредственная причина: утверждение *весьма известных лиц* о том, что одному тщательному измерению можно доверяться в той же мере, как и среднему из большого числа измерений. Возможно, что подобные утверждения появились в связи с бурным успехом техники наблюдений.

Симпсон доказывал, что при треугольном распределении вероятность ошибки среднего арифметического существенно ниже вероятности такой же ошибки в отдельном результате. Он исходил из свойств случайных ошибок, а не, как стало модным, из незнания причин и величины ошибок [23, § 4129]. Современные представления учитывают оптимальность среднего для распределений, близких к нормальному.

Параллельно с применением среднего арифметического применялась **отбраковка уклоняющихся измерений**. Подобную отбраковку рекомендовал Галилей [3, День третий]. Систематически применял её Ламберт[1], как о чём-то обычном о ней писал Даниил Бернулли (который, впрочем, не одобрял её) и Эйлер[2]. Гаусс (и Эдрейн[3]) вывел нормальный закон распределения, в соответствии с которым в принципе возможна погрешность любой величины. Гаусс допускал осторожную отбраковку, но только если уклонение не произошло ввиду несчастливого стечения обстоятельств (выявить которое было невозможно!) [17, письмо Ольберсу 3 мая 1827 г.].

К мнению Гаусса присоединился Струве [12, §§ 30 и 32] и ряд немецких геодезистов [18; 19], которые высказывались против субъективной отбраковки. Вероятностные критерии отбраковки всё же появились во второй половине XIX в. [30; 14 и др.]. Вопреки Гауссу, они отбраковывали любые сильно уклоняющиеся наблюдения. Последовали оживлённые дискуссии, в ходе которых были высказаны соображения, которые по существу совпадали с современными представлениями математической статистики об ошибках первого и второго рода: лучше пожертвовать несколькими, быть может доброкачественными измерениями, но зато обезопасить себя от опасного влияния крупных ошибок. Предложенные критерии основывались на допущении нормального распределения ошибок, и их погрешность, возникающая при малой анормальности распределения (т. е. устойчивость критериев), так и не была исследована, исключением был

известный *критерий трёх сигма*, устойчивость которого доказал Кемниц [4].

За последние 20 – 30 лет появились новые критерии отбраковки, например, [11]. Их характерная особенность – применение выборочных статистик с точно известными распределениями. В этом смысле они безукоризненны (но проблема устойчивости не снята). Их цель: выявление наблюдений, ошибки которых следует объяснять маловероятной реализацией нехарактерных законов распределений. Возможно, что лучшим образом современное состояние вопроса охарактеризовал Райдер [31]:

Представляется, что вопрос об отбраковке или удержании отклоняющихся измерений сводится к здравому смыслу. Конечно, суждению опытного наблюдателя должно быть предоставлено существенное влияние. Это суждение несомненно может быть подкреплено одним или несколькими критериями, основанными на теории вероятностей. Но применение любого критерия, требующего необычного объёма вычислений, вряд ли оправдано, а выводы из критериев, основанных на слишком сложных гипотезах, должны приниматься с крайней осмотрительностью[4].

Взамен среднего арифметического возможна оценка, определяемая последовательными приближениями вида

$$x = \frac{\sum x_i\, p(x - x_i)}{\sum p(x - x_i)}. \qquad (1)$$

Здесь апостериорные веса, зависящие от уклонения данного измерения x_i от искомой оценки, назначаются равноточным с точки зрения классической теории ошибок измерениям. Они могут быть дискретными или непрерывными функциями этих уклонений, и их неоднократно предлагали и в той, и в другой форме математики и астрономы с XVIII в. В ряде случаев подобные веса предлагались, допуская, что в течение обширных рядов наблюдений изменяются их условия, и, соответственно, единый закон распределения ошибок не выдерживается.

При симметричной плотности апостериорные веса дают поправку к среднему за счёт отклонения измерений от попарной симметричности. В обычном случае убывания апостериорных весов к *хвостам* вариационного ряда они позволяют отказаться от отбраковки наблюдений, но нельзя забывать, что их назначают произвольно, субъективно.

В простейших случаях оценка (1) включает оценку наибольшего правдоподобия $x_{0,}$ которая определяется из уравнения

$$\sum \frac{f'(x_i, x_0)}{f(x_i, x_0)} = 0, \qquad (2)$$

где f – плотность распределения. Если ввести апостериорные веса по правилу [20]

$$p(x_i) = \left| \frac{f'(x_i, x_0)}{(x_0 - x_i) f(x_i, x_0)} \right|, \qquad (3)$$

то уравнение (2) примет вид (1).

В 1778 г. Даниил Бернулли применил оценку наибольшего правдоподобия при возрастании весов к хвостам вариационного ряда, но не отметил этого обстоятельства, а почти слепой Эйлер не заметил этого в своём комментарии того же года. Д. Б. также заявил, что применение среднего арифметического равносильно стрельбе вслепую (т. е. допустимо только при равномерном распределении). Однако, его пояснение: мелкие ошибки происходят чаще, чем крупные, как заметил Пирсон, фактически опровергало указанное возражение.

Вместо среднего арифметического иногда применяется **медиана**. Самым известным поборником медианы в XIX в. был Этьен [16][5]. Он исходил из того, что случайным ошибкам присуща лишь равная вероятность появления каждого их знака. Появление α отрицательных и μ – α положительных ошибок при общем числе измерений μ и нахождении истинного значения измеряемой константы в интервале (x_α, $x_{\alpha+1}$) имеет вероятность $C_\mu^\alpha / 2^\mu$. Она максимальна при α = μ/2 если μ чётно и α = (μ – 1)/2 в противном случае.

Далее Этьен доказывает несколько свойств медианы и даже утверждает, что она ближе к истинному значению константы, чем среднее арифметическое если даже мелкие погрешности вероятней крупных, и что медиана является вероятнейшим значением константы если закон распределения погрешностей имеет вид

$$\varphi(x) = Ke^{-|f(x) - f(\beta)|}. \qquad (4)$$

Многие утверждения Этьена независимо повторил Берви [1]. В частности, он элементарно доказывал, что вероятность

истинному значению a из n наблюдений находиться в интервале (x_1, x_n) равна

$$P(x_1 < a < x_n) = 1 - (1/2^{n-1}) . \qquad (5)$$

Опора только на крайние (притом несколько сомнительные) наблюдения ненадёжна, и в математической статистике соответствующая рекомендация учитывает все наблюдения. Поэтому следует считать историческим анахронизмом статью [7], в которой автор предложил ограничить оценку точности измерений подсчётами по формуле (5).

Функцию вида (4) впервые предложил Лаплас [27], который, однако, исходил из чисто умозрительных и притом явно нестрогих соображений. При некоторых (и в том числе неизвестных) распределениях медиана предпочтительней среднего арифметического [5]. Интересно, что Менделеев [10] (который был не только великим химиком, но и весьма известным метрологом) предлагал по возрастанию делить результаты измерений на три разряда и брать в качестве оценки среднее арифметическое из среднего разряда. Это было своеобразным сочетанием среднего арифметического и медианы.

Примечания

1. Именно Ламберт был основным предшественником Гаусса в теории ошибок и впервые употребил этот термин. Он впервые систематически изложил многие основные вопросы этой теории и обработки косвенных измерений. Он первым неукоснительно, хотя и сомнительным образом оценивал точность наблюдений по уклонению среднего арифметического из всех и из всех, кроме наиболее уклоняющегося наблюдения. Ещё до Даниила Бернулли он сформулировал принцип наибольшего правдоподобия. Он, правда, выводил закон распределения ошибок наблюдения (полуокружность) исходя из того, что *нет причин* существования иного закона. Теории ошибок Ламберт посвятил [24, §§ 271 – 306] и большую часть сочинений [25; 26].

2. Мемуар Д. Б. и комментарий Эйлера были опубликованы в 1778 г. на латинском языке. Их английский перевод см. в *Biometrika*, vol. 48, No. 1 – 2, 1961.

3. В 1809 г. Эдрейн опубликовал статью, в которой содержались: два вывода нормального закона распределения ошибок измерений; вывод принципов наименьших квадратов и среднего арифметического; определение вероятнейшего положения судна по известному счислимому месту и наблюдению широты; уравнивание замкнутого буссольного хода. Всё изложение основывалось на выведенном законе распределения, а определение положения судна было аналогично уравниванию хода с замыканием только по одной координате.

Позднейшие выводы нормального закона (Дж. Гершель, Н. Цингер, А. Н. Крылов) имели много общего с одним из выводов Эдрейна. Кемниц (*Тр. Моск. инст. инж. землеустройства* № 3, 1959), впрочем, заметил, что при выводе не были использованы свойства случайных ошибок. Их же непосредственно не использовал Гаусс в 1809 г. В 1818 г. Эдрейн опубликовал две статьи,

посвящённые форме и размеру Земли. В первой из них он обработал по принципу наименьших квадратов результаты существовавших маятниковых наблюдений и получил α = 1/319. Во второй статье он отыскивал радиус сферической Земли при семи различных предположениях об отображении сфероида на сферу и в первом приближении получил во всех случаях $r = (2a + b):3$. Без обоснования он принимает r = 3959,36 *англ. миль*, откуда при указанном сжатии a = 6379, 143 *км*.

4. Укажем в заключение, что критерий трёх сигма предложил Йордан [21]; критерий Шарлье предложил Чубер [15, с. 206]; распределение хи-квадрат вывел Эрнст Аббе [13].

5. Он же опубликовал две менее интересные заметки в *C. r. Acad. Roy. Sci.*, t. 130, 1900, pp. 66 – 69 и 393 – 395.

Библиография

1. Берви Н. В. (1899), Определение вероятнейшего значения измеряемого объекта помимо постулата Гаусса. Отд. физ. наук *Моск. общ. любителей естеств., антропол. и этнографии*, т. 10, с. 41 – 45.

2. Вайман А. А. (1961), *Шумеро-вавилонская математика III – I тысячелетия до н. э.* М.

3. Галилей Г. (1632, итал.), *Диалог о двух главнейших системах мира*. М. – Л., 1948.

4. Кемниц Ю. В. (1957), Оценка точности равноточных геодезических измерений при негауссовых распределениях погрешностей. *Тр. Моск. инст. инж. землеустройства*, вып. 2.

5. Колмогоров А. Н. (1931), Метод медианы в теории ошибок. *Математич. сб.*, т. 38, № 3 – 4, с. 47 – 49.

6. Коперник Н. (1543, латин.), *О вращении небесных сфер*. М., 1964.

7. Корнфельд М. (1955), К теории ошибок. *Докл. АН СССР*, т. 103. № 2, с. 213 – 214.

8. Лейбниц Г. В. (1704, латин.), *Новые опыты о человеческом разуме*. М. – Л., 1936.

9. Маковельский А. О. (1914), *Досократики*, ч. 1. Казань.

10. Менделеев Д. И. (1875), Ход работ по возобновлению прототипов или образцовых мер длин и веса. *Соч.*, т. 22. Л. – М., 1950, с. 175 – 213.

11. Смирнов Н. В. (1941), Об оценке максимального члена в ряду наблюдений. *Докл. АН СССР*, т. 33, № 5.

12. Струве В. Я. (1861, 1957), *Дуга меридиана*. М.

13. Abbe E. (1863), Über die Gesetzmäßigkeit in der Verteilung der Fehler bei Beobachtungsreihen. *Ges. Abh*. Bd. 2. Jena, 1906; 1989, pp. 55 – 81.

14. Chauvenet W. (1863), *Manual of Spherical and Practical Astronomy*, vols. 1 – 2. Philadelphia. New York, 1960.

15. Czuber E. (1891), *Theorie der Beobachtungsfehler*. Leipzig.

16. Estienne J. E. (1890), Etude sur les erreurs d'observation . *Rev. Artill*., t. 36. Перевод: *Артилл. Ж.*, 1895, № 8, с. 703 – 723.

17. Gauss C. F. (1900), *Werke*, Bd. 8. Leipzig.

18. Gerling Ch. L. (1843), *Ausgleichungsrechnung*. Hamburg – Gotha.

19. Hagen G. (1837), *Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin, 1867, 1882.

20. Hulme H. R., Symms L. S. T. (1939), The law of error and the combination of observations. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc*., vol. 99, No. 8, pp. 642 – 649.

21. Jordan W. (1877); Über den Maximalfehler einer Beobachtung. *Z. Vermessunswesen*, Bd. 6, No. 1, pp. 35 – 40.

22. Kepler J. (1609, латин.), *Neue Astronomie.* München – Berlin, 1929.

23. Lalande J. J. de (1771, 1792), *Astronomie*, t. 3. Paris.

24. Lambert J. H. (1760), *Photometria*. Augsburg.

25. Lambert J. H. (1765), Anmerkungen und Zusätze zur praktischen Geometrie. В книге автора *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Bd. 1. Berlin, pp. 1 – 313.

26. Lambert J. H. (1765), Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtung und Versuche. Там же, pp. 424 – 488.

27. Laplace P. S. (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. *Oeuvr. Compl.*, t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.

28. Maire C., Boscovich R. J. (1770), *Voyage astronomique et géographique dans l'Etat de l'Eglise*, кн. 5. Paris.

29. Исключено из Библиографии.

30. Peirce B. (1852), Criterion for the rejection of doubtful observations. *Astron. J.*, vol. 21, No. 21(45).

31. Rider P. R. (1933), Criteria for rejection of observations. *Wash. Univ. Studies*, new ser., sci. and technology, No. 8.

32. Simpson T. (1756), On the advantage of taking the mean. *Phil. Trans. Roy. Soc*. за 1755, vol. 49, pt. 1, pp. 82 – 93.

33. Simpson T. (1757), An attempt to show the advantage of taking the mean. В книге автора *Misc. Tracts on Some Curious Subjects*. London, pp. 64 – 75.

34. (1817), *Algebra and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. Перевод H. Th. Colebrooke. London. Wiesbaden, 1973

В нашей недавней монографии (Шейнин 2019) читатель найдёт немало нового материала по описанной теме:

Шейнин О. Б. (2019), *Теория вероятностей. Исторический обзор*. Берлин, **S, G,** 11.

II

О. Б. Шейнин

К истории уравнительных операций по способу косвенных измерений

Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка, № 3, 1967, с. 25 – 32

Определение n неизвестных $x, y, z, \ldots$ из уравнений

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + l_i = v_i,\ i = 1, 2, \ldots, m > n \qquad (1)$$

выполнялось в XVIII в. при обработке результатов градусных измерений с помощью различных условий, накладываемых на v_i, которые, впрочем, далеко не всегда выписывались явно. Одним из первых подобную задачу решал Эйлер [18, с. 263]. Он выводил форму и размеры Земли по четырём градусным измерениям. Исключив неизвестные параметры земного эллипсоида, он получил уравнение между поправками v_i в длины градусов меридиана и ограничился прикидкой.

Первым классическим способом решения систем (1) был **способ сочетаний уравнений** (попарных сочетаний в случае двух неизвестных). Из данной системы образовывались все сочетания уравнений по два, из каждого сочетания неизвестные определялись под условием $v_i = 0$ (v_i не выписывались, но подразумевались), а их окончательные значения принимались равными соответствующим средним арифметическим из отдельных сочетаний. Подобным образом параметры земного эллипсоида определял Бошкович [30], который, впрочем, не ограничился этим способом, см. ниже, и Мунке [32] уже после введения принципа наименьших квадратов (ПрНКв).

Бошкович применил способ сочетаний даже при обработке непосредственных измерений [11]. Вообще учёные XVIII в. пытались обрабатывать и косвенные, и непосредственные измерений при помощи одного и того же правила. Связь этих двух задач была хорошо известна, она усматривается даже в терминологии: Ламберт [25, § 6] называл и среднее арифметическое, и решение систем вида (1) единым словом *Mittel*, а Лаланд [24, § 2699], единым словом *milieu*.

Вспоминая измерения углов во всех комбинациях, можно спросить себя: не пришёл ли Гаусс к этому способу измерения, исходя из сочетания уравнений?

Тобиас Майер [31] ввёл **способ средних**

$$\sum v_i = 0. \qquad (2)$$

Он решал систему из 27 уравнений с тремя неизвестными, предварительно образовав три суммарных уравнения по условию (2) для каждого из них. Майер был вынужден, как он сам указал, придумать этот способ, чтобы избавиться от тяжёлой работы по образованию и обработке всевозможных сочетаний уравнений по три.

Таким образом, он обобщил метод средних и вообще условие (2) можно понимать как единое сочетание всех уравнений. Примерно в то же время условие (2) фактически применил Эйлер [19, §§ 115, 117 и далее]. Получив, например, два уравнения

$$x = l_i + b_i y + c_i z + \ldots$$

с попарно примерно равными коэффициентами, он принял, что

$$x = (1/2)[\sum l_i + y\sum b_i + \ldots],$$

что соответствовало условию (2).

Лаплас [7, с. 862, левый столбец] ошибочно приписал Коутсу метод средних. На самом деле у Коутса [5] никаких уравнений нет, есть лишь рассуждение в несколько строк, суть которого такова: центр тяжести наблюдений

Будет вероятнейшим положением предмета, которое с наибольшей надёжностью может считаться его истинным положением.

В то время количественных показателей преимущества того или иного способа обработки наблюдений ещё не было. Даже Лежандр, более чем через 80 лет, обосновал ПрНКв качественными соображениями.

Вслед за Эйзенхартом [17] мы считаем, что в XVIII в. условие (2) воспринималось как вытекающее из равной вероятности ошибок каждого знака, и (добавим мы сами) как приводящее непосредственные измерения к арифметической средине.

Условие типа (2) применялось и Ламбертом [25] для подбора эмпирических прямых и кривых по точкам, наблюдениям (x_i, y_i). Он делил наблюдения на два (для прямых) или несколько (для кривых) интервала (интервалов), определял центр тяжести наблюдений в каждом и проводил прямую или кривую через эти центры. Он исходил из наличия функциональной связи между интересующими его величинами, но подобные методы могут применяться и в корреляционном анализе.

Коши [14; 8, гл. 14, § 5] рекомендовал приём, использующий условие (2).

Бошкович [30, с. 501 и далее] указал на недостаточность способа сочетаний и предложил **новый способ**, чтобы

Взять среднее так, чтобы оно было не просто средним арифметическим, а по определённому закону подчинялось правилам случайных комбинаций и вычисления вероятностей …

Конкретно он предложил уравнивать результаты градусных измерений под тремя условиями. Первое из них было требованием линейной зависимости вида (1) между неизвестными, остальные же были такими:

Во-вторых, чтобы сумма положительных поправок равнялась сумме отрицательных поправок. В третьих, чтобы сумма всех поправок, положительных и отрицательных, была наименьшей из возможных при выполнении обоих первых условий. […]

Второе условие требуется для равной степени вероятности для отклонений маятника и для ошибок наблюдений при возрастании и убывании длины градуса. Третье необходимо для наибольшего, поскольку это возможно, приближения к наблюдениям […].

Требование Бошковича об *определённом законе* правомерно. Однако, не владея аппаратом функций плотностей, он, разумеется, не смог сказать, как именно *правила случайных комбинаций* соответствовали его условиям.

Способ Бошковича применил Лаплас [28], а Гаусс [3, § 186] ошибочно приписал третье условие Бошковича Лапласу.

Гусак [5] рассмотрел историю **принципа минимакса**

$$|v_{max}| = \min \qquad (3)$$

(минимум имеет место относительно любых решений системы (1)) вплоть до задачи Чебышёва о наилучшем на заданном отрезке приближении аналитической функции многочленом данной степени. Впервые применил этот принцип Эйлер [19, §§ 122 – 123] (чего Гусак не заметил), его применяли Лаплас [28] и многие другие учёные, а Ламберт [26, § 420] признался, что не сумел составить для него алгоритма. Проблемой его алгоритмизации занимался Коши [13]. Метод минимакса не обеспечивает никакого оптимального решения систем (1), но если даже он не приводит к приемлемому решению, то либо наблюдения были скверными, либо теория, на основании которой была составлена эта система, была неверной.

Остановимся на **связи принципа наименьших квадратов с рассмотренными методами**. Решение систем (1) по ПрНКв может быть получено [23] в виде

$$x = \frac{\sum \lambda_i \alpha_i}{\sum \lambda_i^2},\ y = \frac{\sum \lambda_i \beta_i}{\sum \lambda_i^2}, ...,$$

где α_i/λ_i, β_i/λ_i, … – решения всевозможных систем из *n* уравнений, выделенных из исходной системы (1). Решение по ПрНКв отличается от решения по способу сочетаний именно учётом весов частных решений. И веса неизвестных могут быть получены из весов, определяемых при решении выделенных подсистем системы (1) [21].

Далее, и Гаусс [3, § 186], и Лаплас [29, гл. 4, § 24] заметили, что принцип

$$\lim(v_1^{2k} + v_2^{2k} + ... + v_n^{2k}) = \min,\ k \to \infty,$$

который при большом, но конечном *k* можно рассматривать как обобщение ПрНКв, приводит к принципу минимакса. Действительно, при некотором достаточно большом *k* наибольшее влияние будет оказывать слагаемое v_i^{2k}, где $v_i^2 = \max(v_j^2)$, и, следовательно, должно соблюдаться условие $v_i^2 = \min$. Аналогично будет обстоять дело при любом достаточно большом фиксированном *k*, хотя максимальным может стать *v* с другим индексом.

Там же Гаусс утверждает, что принцип $\sum|v_i| = \min$ практически не может применяться к обработке избыточных систем уравнений:

Остальные уравнения принимаются во внимание постольку, поскольку они способствуют принятому уже решению при выборе.

Гаусс, видимо, имел в виду, что отказ от избыточных систем уравнений позволил бы добиваться нулевого значения суммы $\sum|v_i|$, но вряд ли это замечание существенно.

Вообще же результаты Гаусса были известны явно недостаточно, и больше всего ошибся В. Я. Цингер [10, с. 1]: Лаплас будто бы представил

Строгое и беспристрастное исследование. Из его анализа видно, что результаты способа наименьших квадратов получают более или менее значительную вероятность только при большом числе наблюдений. […] *Гаусс старался на основании посторонних соображений придать этому способу безусловное значение* [это высосано из пальца] […], *при ограниченном же числе наблюдений* […] *всякое сочетание наблюдений может* […] *повести столько же к увеличению погрешностей, сколько и к ослаблению их*.

Лаплас [7, глава Приложение теории вероятностей к натуральной философии] указал, что и при малом числе наблюдений *естественно* применять способ наименьших квадратов, чтобы *без гадания получать искомые поправки*. Там же Лаплас утверждал, что следует предпочесть те способы уравнивания триангуляции, результаты которых имеют наибольший вес. Это высказывание имеется уже в издании 1816 г. [27].

В той же главе Лаплас связывает требование наибольшего веса с необходимостью по возможности быстрейшего убывания плотности распределения. Под весом он понимает положительный параметр k закона типа $\exp(-kx^2)$ и указывает, что вес среднего результата (*самого выгодного из всех*) равен сумме весов измерений и *растёт вместе с числом наблюдений, делённым* (?) *на число* [неизвестных] *элементов*.

В главе *Исторический очерк* … Лаплас добавляет, что вероятности, определённые *из не очень многочисленных* наблюдений, *немного сомнительны*, но что

Почти всегда достаточно знать, очень ли близка к единице вероятность, что ошибки полученных результатов заключены в тесных пределах, и, если этого нет, до каких пор следует увеличивать число наблюдений, чтобы получить такую вероятность, которая не оставляла бы места никакому разумному сомнению относительно достоинства результата.

Многое из сказанного содержится и в других работах Лапласа [29, Дополнения 1 и 2]. Итак, оптимальный результат соответствует максимуму веса, вес обратно пропорционален сумме квадратов уклонений. Он же параметр нормального закона, а его максимум соответствует наименьшей вероятности ошибок, либо наименьшей длине *доверительного интервала*. Этот вывод не позволяет обходиться без нормального закона, и Лаплас безусловно исходил из предельной теоремы Муавра – Лапласа, как её стали называть.

Гаусс об этих мыслях Лапласа почти умалчивает. И вот его рассуждения о весе. В *Теории движения* [3] его ещё нет, есть только *степень точности наблюдений* (§ 173), которая связывается с *одинаковой лёгкостью*, т. е. с равной возможностью ошибок (§§ 173, 178 – 179). Эту равновозможность Гаусс понимал как корень из веса (§§ 173, 181). Впрочем, Гаусс ввёл и *меру точности h*, т. е. параметр распределения

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2\Delta^2), -$$

он же корень из веса (§§ 178 – 179), но не оговорил аналогии между мерой и степенью точности.

В [2, § 3], исходя из условия максимума величины

$$h^m \exp(-h^2(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots)),$$

пропорциональной, как бы мы сейчас сказали, функции правдоподобия, Гаусс вывел *вероятнейшее* соотношение

$$h = \sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots)}},$$

где α, β,… – ошибки m наблюдений.

Наконец, Гаусс [4, первая часть мемуара, § 6] ввёл *среднюю ошибку, которую надо опасаться* (мы сохранили термин Лапласа) m^2 и заметил (§ 9), что при

$$\varphi(x) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{x^2}{h^2})$$

$$m = h/\sqrt{2}. \qquad (5)$$

Он назвал *относительным весом* величину, обратно пропорциональную h^2, см. также [17].

Из (4) и (5) Гаусс мог бы получить формулу вида

$$m = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n}}, \qquad (6)$$

однако не сделал этого видимо потому, что вывод зависел бы от реализации нормального распределения и [1, с. 146 – 147] специально подчеркнул, что формула (6) не вполне точна и что следует соблюдать *достоинство науки*. В [4, первая часть мемуара, § 15] Гаусс вывел, как представляется, нестрого, формулу (6) без упоминания какого-либо распределения, и в ней уже *скрывалось правило наименьших квадратов* [10, § 33].

В § 38 Гаусс обобщил исправленную формулу (6) на случай нескольких неизвестных. Числителем корня была сумма квадратов уклонений v_i, см. формулу (1), знаменателем – разность *число наблюдений минус число неизвестных*. Эту формулу в геодезической литературе (но не в Германии!) долго почему-то называли формулой Бесселя.

Математическая статистика позволяет полнее использовать информацию, заключённую в каждом измерении, но для этого требуется знание закона распределения их ошибок. Веса крайних измерений могут оказаться больше весов средних измерений, некоторые веса могут быть даже отрицательными[1].

Примечание

1. См. *Введение в теорию порядковых статистик*. М.. 1970. Перевод с английского (Нью-Йорк, 1963).

Библиография

1. Гаусс К. Ф. (1823, нем.), Автореферат *Теории комбинаций* …, 24 февр. 1823. В сборнике статей автора (1957, с. 144 – 147): *Избр. геод. соч*. т. 1. М.

2. Он же, 1816, нем., Определение точности наблюдений. Там же, с. 121 – 128.

3. Он же, 1809, латин., *Теория движения*, отрывок. Там же, с. 89 – 109.

4. Он же, 1823 – 1828, латин., Теория комбинаций наблюдений. Там же, с. 17 – 57, 59 – 88.

5. Гусак А. А., 1961, Предыстория и начало развития теории приближения функций. *Историко-математические исследования*, вып. 14, с. 289 – 348.

6. Идельсон Н. И., 1947, *Способ наименьших квадратов* … Введение см. в этом сборнике.

7. Лаплас П. С., 1814, франц., *Опыт философии теории вероятностей*. В книге Ю. В. Прохоров, редактор, 1999, *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.

8. Линник Ю. В., 1958, *Метод наименьших квадратов*. М., 1958.

9. Марков А. А., 1898, Закон больших чисел и способ наименьших квадратов. *Избр. труды*. Без места, 1951, с. 231 – 251.

10. Цингер В. Я., 1862, *Способ наименьших квадратов*. М., магистерская диссертация.

11. Шейнин О. Б., 1966, К отбору и уравниванию непосредственных измерений. В этом сборнике.

12. Исключено из Библиографии.

13. Cauchy A. L., 1831, Sur le système de valeurs … *Oeuvr. Compl.*, sér. 2, t. 1. Paris, 1905, pp. 358 – 402.

14. Cauchy A. L., 1853, Sur l'évalution d'inconnues … Там же, sér. 1, t. 12. Paris, 1900, pp. 36 – 46.

15. Cotes R ., 1722, Aestimatio errorum … Англ. перевод в Gowing R., 1983, *Roger Cotes – Natural Philosopher*. Cambridge, pp. 13 – 49.

16. Исключено из Библиографии

17. Eisenhart Ch., 1961, Boscovich and the combination of observations. В книге E. S. Pearson, M. G. Kendall, редакторы, 1970, *Studies in the History of Statistics and Probability*. London, pp. 88 – 100.

18. Euler L., 1755 за 1753, Eléments de la trigonométrie sphéroidique. *Opera Omnia*, ser. 1, t. 27. Zürich, 1954, pp. 309 – 339.

19. Euler L., 1749, Recherches sur … der inégalités du mouvement de … ser. 2, t. 25. Zürich, 1960, 45 – 157.

20. Gauss C. F., 1826, Brief nach Olbers 24.1.1826. *Werke*, Bd. 8.

21. Gleinsvik P., 1967, The generalisation of the theorem of Jacobi. *Bull. Géod.*, t. 85, pp. 269 – 281.

22. Ivory J., 1825, On the method of least squares. *Lond., Edinb. and Dublin Phil. Mag.*, vol. 65, No. 321 – 323, pp. 1 – 10, 81 – 88, 111 – 168.

23. Jacobi C. G. J., 1841, Latin, *Über die Bildung und Eigenschaften der Determinanten. Ostwald Klassiker* No. 77. Leipzig, 1836.

24. Lalande J. J. de, 1771, 1792, *Astronomie*, t. 3. Paris.

25. Lambert J. H., 1765, Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche. В книге автора *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Bd. 1. Berlin, pp. 424 – 488.

26. Lambert J. H., 1765, Anmerkungen und Zusätze zur praktischer Geometrie. Там же, с. 1 – 313.

27. Laplace P. S., 1814, *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris,1816.

28. Laplace P. S., 1798 – 1825, *Traité de mécanique celeste*. Англ. перевод тома 2, Н. Боудитч. Boston, 1832, 1966.

29. Laplace P. S., 1812, *Théorie analytique des probabilités*. *Oeuvr. Compl*., t. 7. Paris, 1886.

30. Maire C., Boscovich R. J., 1770, *Voyage astronomique et géographique dand l'Etat de l'Eglise*. Paris.

31. Mayer T., 1750 за 1748, Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe. *Kosmogr. Nachr. u. Samml*., pp. 52 – 183.

32. Muncke, 1827, Erde. В книге *J. S. T. Gehlers physikalische Wörterbuch*, Bd. 3. Leipzig.

III

Морсбах
генерал-лейтенант в резерве

Генерал-лейтенант доктор Оскар Шрейбер

Morsbach, Generalleutnant Dr. Oskar Schreiber.

Z. f. Vermessunsgswesen, No. 24, 1905, pp. 529 – 537

[1] Со смертью этого прекрасного человека в Ганновере 14 июля 1905 г., последовавшей после продолжительных страданий, геодезическая наука и практика потеряли одного из своих самых выдающихся и успешных представителей. Он родился 17 февраля 1829 г. в Штольценау на Везере в ганноверской провинции и с 1848 г. служил в армии этой провинции. Много лет покойный участвовал в топографических съёмках, в основном в пустошах и болотистой местности среднего течения Эмс.

Незадолго до [австро-прусской] войны 1866 г. Шрейбер, тогдашний капитан первого горно-стрелкового батальона, опубликовал сочинение (1866), которое произвело сенсацию у геодезистов и теоретиков картографии [математических картографов].

Более всего, безусловно следует поблагодарить Гаусса и Бесселя за то, что в первой половине XIX века верховенство в высшей геодезии перешло от Франции к Германии[1]. Для съёмки Ганновера Гаусс придумал систему координат и привёл необходимые формулы, научное обоснование которых отложил на более позднее время. Но он так и не смог осуществить своё намерение, и геодезисты в Ганновере применяли его формулы механически, потому что до Шрейбера никто не смог их вывести.

[**2]** Весной 1867 г. капитан Шрейбер служил в формировании прусской армии, которое было объединено с пехотным полком № 16 Ганновера, но уже 27 декабря того же года ввиду его научного достижения он был откомандирован в тогдашнее Бюро по триангуляции провинции и начал работу, в которой его особые способности смогли полностью раскрыться.

Уже 1 апреля 1868 г. он стал начальником триангуляционных работ и многие годы вплоть до 1874 г. был в основном занят прокладкой нескольких сетей триангуляции первого класса. В январе 1875 г. была реорганизована административная служба съёмки провинции, и Шрейбер, хоть он и был майором только с 1873 г., стал начальником тригонометрического отделения, приёмником весьма заслуженного генерала Мороцовица, и уже

осенью 1874 г. ему поручили кафедру высшей геодезии в военной академии.

Можно считать весьма счастливым обстоятельством то, что он, подполковник с 1879 г. и полковник с 1883 г., смог оставаться на этом посту более 13 лет. Это позволило ему стать геодезистом первого ранга и указать для геодезии многие новые направления. Ему потребовалось весьма чётко представить себе основы и предварительные условия работы, равно как и применить свой немалый математический талант.

Он часто жаловался, что не досталась ему действительно хорошей памяти. Зато он был практически неистощимо выносliв, неизменно трудолюбив. День за днём, зимой и летом он начинал работать с самых ранних часов. И не следовало недооценивать его выдающийся талант упорядочивания. Все его сочинения и инструкции были безупречно оформлены и выказывали самую тщательную заботливость. Это обстоятельство вряд ли можно переоценить, особенно если оно касалось многих сотрудников, которых надо было чётко направлять, а результаты работы приводить к виду, удобному для применения.

Здесь невозможно исчерпывающе описать все научные и практические успехи, которым геодезия обязана генералу Шрейберу, и мы остановимся лишь на важнейших из них.

[3] Форма цепи треугольников и сети первого класса были полностью изменены. Прежде всего, форма треугольников стала благоприятнее, что обеспечивалось более основательным рекогносцированием посредством более высоких смотровых площадок, предварительными грубыми измерениями и существенным улучшением постройки сигналов. Их рациональная конструкция и использование специально подготовленных специалистов вскоре позволили ему изготавливать платформы для наблюдений такой прочности и на такой высоте, которые прежде не были известны.

Отказались от тяжёлых в основном наблюдений многочисленных диагональных связей [от геодезических четырёхугольников], которые никак не оправдывались достигаемым повышением точности. Именно, сети в основном должны были состоять из треугольников хорошей формы, измеренных как можно точнее и располагавшихся по прямой линии. Таков был характерный руководящий принцип всех видов измерений генерала Шрейбера, как он сам указывал. Следует не накапливать бессистемно проверки качества наблюдений, а самым тщательным образом пытаться установить элементы, которые в первую очередь обеспечивали точность результатов. В соответствии с предварительно рассмотренным планом

использовать время, силы и средства для достижения наивысшего качества результатов[2].

Переход от больших треугольников первого класса к треугольникам второго класса оказался трудным [при сохранении точности], а потому в сеть этого второго класса вставляли промежуточные пункты первого класса. Это не требовало существенного увеличения затрат времени или средств, но обеспечивало весьма значительное укрепление триангуляции второго класса.

[4] Исключительно важной целью базисных сетей было определение длин сторон больших треугольников по угловым измерениям. Обычно наблюдались все существовавшие и в основном избыточные направления [базисных сетей] без тщательного определения тех из них, которые точнее всего определяли длины сторон больших треугольников, что позволило бы более целесообразно расходовать силы и средства.

Генерал Шрейбер (1882) исчерпывающе решил эту задачу, и с тех пор все три базиса, измеренные тригонометрическим отделением, были предварительно исследованы в соответствии с указанными основными положениями. Базисные сети наблюдались с учётом возможно более благоприятного распределения весов наблюдений и отличались неожиданной простотой.

Генерал Шрейбер руководил измерением трёх базисов [частично других!] после того, как в 1871 г. он участвовал в измерении другого базиса при помощи базисного аппарата Бесселя и подробно изучил все его части и их совместную работу, равно как и улучшенный аппарат, изготовленный Берлинской комиссией стандартов. Были улучшены устройства для выравнивания базисных жезлов, усилена прочность установки при помощи подставок из кованого железа, улучшено микрометрическое горизонтальное и вертикальное регулирование жезлов при помощи кривошипного винта, существенно усовершенствован отвеса и т. д. Скорость и точность базисных измерений повысились.

[5] Триангуляция первого класса была полностью пересмотрена. Были введены измерения углов вместо прежнего обычного измерения направлений. В двух основополагающих статьях Шрейбер (1878; 1879) обсудил и обосновал этот новый метод и указал его преимущества. Помимо многих дополнительных выгод оказалось, что углы между направлениями измеряются точнее; определённый предварительно составленный план наблюдений можно было без труда изменять; лучше исключались постоянные ошибки и ошибки штрихов лимба; веса углов, измеренных на данной

станции, в точности совпадали друг с другом, и почти равнялись друг другу в масштабе всей сети; существенно упрощалось уравнивание на станциях и всей системы в целом.

Ныне считается несомненным, что измерение углов оказалось важнейшим нововведением, которое на протяжении жизни одного поколения обеспечило тригонометрическому отделению столь высокое совершенство триангуляции первого класса. Остальные страны начали всё активнее перенимать этот опыт, и даже Франция применила *принципы, установленные генералом Шрейбером*, при новом измерении большого градусного измерения в районе Кито [Эквадор]. Так заявил комендант [начальник военно-учебного заведения] Bourgeois на 14-й генеральной конференции Международной геодезической ассоциации (Копенгаген, 1903).

[6] Триангуляция третьего класса полностью изменилась. Раньше только триангуляции первых двух классов уравнивались по методу наименьших квадратов (МНКв) по схеме условных измерений, а [координаты] пунктов третьего и четвёртого классов вычислялись, исходя из осреднённых значений грубо вычисленных сторон [триангуляций высших классов]. Противоречивые значения [координат] появлялись у 9/10 пунктов этих низших классов.

Чтобы уравнять все триангуляции вплоть до низших классов и притом справиться с тяжёлыми вычислениями, была выбрана для триангуляций второго и третьего классов плоская прямоугольная система координат. Оказалось возможным вычислять эти сети простейшим образом, но потребовалось переносить измерения со сфероида[3] на плоскость.

Наиболее благоприятной была двойная конформная проекция: вначале измерения переносились на сферу в соответствии с законом, который установил Гаусс, затем в конформной проекции, схожей с проекцией Меркатора, измерения переносились на плоскость. Для измерений третьего класса уравнивание существенно упрощалось, потому что вторая стадия была вполне достаточна и сфероид не был нужен.

С 1876 г. все станции, определяемые тригонометрическим отделением (в среднем 20 на 100 *км*^{2}), уравнивались по МНКв. Он же применялся при вставке новых измерений в существовавшую сеть, что обеспечивало непротиворечивую систему для всей провинции.

Инструкции 1877 г. по вычислениям, которые обеспечивали эту большую работу, описывали всё необходимое для переноса, уравнивания и регистрации чисел в объективном и официальном порядке. Копии инструкций использовались в отделении.

Для вычисления географических координат по сфероидическим дирекционным углам и длинам сторон треугольников генерал Шрейбер привёл необходимые формулы и таблицы в трёх тетрадях для указанных трёх классов триангуляции соответственно, см. научное обоснование вычислений в его статьях (1897; 1899; 1900). Эти статьи были плодом выхода Шрейбера в отставку: будучи перегружен работой, он не смог закончить эту работу раньше.

[7] Здесь невозможно перечислить успехи в методах вычисления, в требованиях к полевой работе, совершенствовании инструментов или изобретении вспомогательных технических средств и тем более в фундаментальных исследованиях мер и погрешностей в градуировке лимбов.

За всё это геодезия благодарна генералу Шрейберу. Но я всё же хочу особо подчеркнуть, что одной из его забот была *длительная сохранность* сетей триангуляции и нивелирования, т. е. дорогостоящего труда, который потребовал так много усилий.

Это обстоятельство сильно склонило его к введению новых марок и новых исключительно жёстких и тщательных инструкций. Вряд ли ему удалось сделать достаточно по отношению к особо важным местам или таким объектам, будущего смещения которых можно было опасаться (колокольням и пр.[4]).

В таких случаях [он требовал] точнейших определений точек, от которых зависели результаты измерений, так что их отождествление было бы всегда возможно. До 1875 г. станции триангуляции третьего и четвёртого класса закреплялись только гранитными столбами, но он тут же дополнительно предписал подземные плиты.

[8] Все технические инструкции, которые он ввёл в действие, были результатом самого внимательного теоретического рассмотрения и обширных практических проб. Неделями он занимался нивелированием и триангуляцией третьего класса, исследовал каждую подробность этих работ и не успокаивался, пока оставалось что-нибудь неясное или сомнительное. Можно поэтому сказать, что его инструкции были почти всегда надёжны.

Генерал Шрейбер смог представить несравнимые статьи для Международной геодезической ассоциации и поэтому пользовался доброй славой, хоть и не посещал регулярно ни её генеральных конференций, ни конференций её постоянных комиссий. Ему не нравилось появляться на многолюдных собраниях, но, с другой стороны, он особо удовлетворялся и радовался в неизменном согласии с превосходным директором геодезического института профессором, доктором Гельмертом способствовать общей цели.

Будучи постоянно готов всеми силами поддерживать его работы, он также высоко ценил мнение и надёжный совет этого выдающегося учёного, и их контакты приносили хорошие плоды.

Он был не менее готов помогать и идти навстречу всё возраставшему числу ведущих офицеров и учёных, которых другие страны посылали в Берлин для ознакомления с достигнутыми методами и соответствующими успехами и лично поучаствовать в работах. Возникавшая переписка часто занимала у него слишком много времени. Везде, где только было возможно, он по мере сил способствовал геодезии и охотно помогал геодезистам, особенно доцентам высших технических училищ, участвовать в практической работе отделения. При случае он появлялся на общих собраниях Немецкого геометрического союза и выказывал живейший интерес в его общем развитии и особенно в работе его органа, *Zeitschrift f. Vermessungswesen*, которому представлял ценные рукописи.

По поводу работ, преимущественно касавшихся использования и охраны природных ресурсов, его здравый смысл ясно подсказывал ему, что они смогут принести наибольшую пользу, если результаты измерений будут представлены заинтересованным сторонам в удобной, ясной и недвусмысленной форме. Исходя из этого, а также из всё новых соображений и неутомимых попыток, он представил сочинение *Абрисы, координаты и высоты пунктов, определённых тригонометрическим отделением …* (*Abrisse, Koordinaten und Höhen sämtlicher von der trigonometrischen Abteilung … bestimmten Punkte*). Это великое творение вряд ли найдёт себе подобное в какой-либо иной стране. Оно должно было состоять из 24 томов, из которых к настоящему времени вышло 16. Он также озаботился о появлении в удобной форме высот пунктов, определённых нивелированием[5].

Неудивительно, что после проведения кратко описанной реформы техническая работа тригонометрического отделения приняла совершенно новый вид, и труды заслуженных предшественников Шрейбера казались исчерпанными.

Прошло более 17 лет с тех пор, как генерал Шрейбер передал тригонометрическое отделение своим приёмникам[6], но всё существенное в его инструкциях всё ещё остаётся в полной силе, и, как можно судить, ещё долго останется таковым же.

[9] 1 мая 1888 г. полковник Шредер стал главой схёмки провинции, 2 августа того же года его произвели в генерал-майоры, а 18 ноября 1890 г. он стал генерал-лейтенантом. Его членство в попечительском совете государственного физико-технического института сохранилось.

К его радости обширный охват его работы привёл его к тесному официальному общению с топографическими съёмками, с которыми он был издавна хорошо знаком, и представил ему возможность способствовать геодезии в более широком смысле и поставило перед ним многие чудесные задачи. Тем не менее, его основной заслугой, как он сам прекрасно знал, была его 13-и летняя деятельность как главы тригонометрического отделения, с которым он расстался с тяжёлым сердцем.

После заявления об отставке 8 апреля 1893 г. и перевода в резерв он переехал в Ганновер. Несколько дней раньше, к его большой радости, философский факультет Берлинского университета присвоил ему степень почётного доктора. Шрейбер неустанно тратил появившееся свободное время для научного продвижения геодезии, пока возрастающие страдания не заставили его отбросить перо.

[10] Его богатая трудами жизнь послужила длительному восхвалению немецкой науки и армии, в которой он прослужил 45 лет. Лишь небольшую долю этого длительного срока он провёл на действительной военной службе, однако во время франко-прусской войны [1870 – 1871 гг.] он был командиром роты 16-го пехотного полка и некоторое время командиром его батальона.

В битве 7 октября 1870 г. он был ранен, но уже 28 ноября вернулся к новой битве. Его товарищи признавали, что после его ухода в их полку [не осталось?] офицеров, бесстрашных и хладнокровных в критических ситуациях: в апреле 1871 г., награждённый Железным крестом, он вернулся к геодезической работе.

[11] Я 20 лет был его коллегой и подчинённым и почти ежедневно тесно общался с ним, затем стал его приёмником. И я не могу закончить свой набросок без указания на человека в этом заслуженном геодезисте.

Генерал Шрейбер имел особый сдержанный характер. Его взгляды и мнения наверняка вытекали из его собственного опыта и мыслей, а посторонние влияния в них едва проявлялись. Ему претила видимость. При всех обстоятельствах он предпочитал истину, был противником любых попыток сокрыть её и мог неожиданно и резко отозваться о них, и он никогда не изменял своим благородным и бескорыстным убеждениям, даже если переживал болезненное разочарование и неблагодарность. Можно удивляться его твёрдости; он был неизменно готов защищать всеми силами благополучие своих подчинённых, и офицеров, и обычных людей, которые об этом никогда не забывали.

Примечания

1. Германией в то время часто называлась вся область немецкого языка.

2. Здесь и ниже (§ 4) просматриваются элементы линейного программирования. См. следующую статью.

3. Точнее, переносить измерения с поверхности референц-эллипсоида.

4. Неясно, почему колокольни могли быть смещены. Но вот в СССР, быть может до 1940 г., колокольни безжалостно уничтожались. Геодезист, старше меня лет на десять, сказал мне когда-то, что в инструкции по триангуляции было указано, что колокольни не являются долговременными сооружениями.

5. Как понимать *озаботился*? И неясно, почему вообще было упомянуто нивелирование, ведь высоты пунктов были уже перечислены в названном выше сочинении.

6. Первым приёмником был сам автор, см. § 11.

Библиография

Oskar Schreiber

1866, Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung. Дополнительная информация отсутствует.

1878, Über die Anordnung von Horizontalwinkelbeobachtungen auf der Station. *Z. f. Vermessungswesen* (ZfV), No. 4.

1879, Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen. ZfV, No. 3.

1882, Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz. ZfV, No. 6.

1897, *Konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abteilung der Kgl Preußischen Landesaufnahme. Formeln und Tafeln*. Это сочинение продавалось в книжном магазине королевского двора в Берлине. [Возможно, что несколько экземпляров сохранилось в какой-либо библиотеке и/или архиве].

1899 – 1900, Zur konformen Doppelprojektion. ZfV, pp. 491 – 502, 593 – 613; 257 – 281, 289 – 310.

IV

[Ф. Р.] Гельмерт

Генерал-лейтенант доктор Оскар Шрейбер

[F. R.] Helmert, Generalleutnant Dr. Oskar Schreiber.
Vierteljahrsschrift Astron. Ges., Bd. 40, 1905, pp. 303 – 310

[1] Шрейбер умер в Ганновере 14 июля 1905 г. на 77-м году жизни. Он хорошо известен всем геодезистам как создатель тригонометрической основы съёмки Пруссии. Астрономией он не занимался, но был членом Астрономического общества. Близость геодезии к астрономии можно легче обосновать, если вспомнить о всех заслугах этого человека, которых смог бы добиться только гениальный человек.

Он родился 17 февраля 1829 г. в Штольпенау [Штольценау?] на Везере в провинции Ганновер. Свою карьеру он начал как ганноверский офицер, занятый съёмкой своей провинции, которую Гаусс обеспечил тригонометрическим обоснованием. Он попытался вывести и обобщить вычислительные формулы Гаусса, и это прекрасно удалось ему.

Все позднейшие работы Шрейбера показали, что он являлся лучшим знатоком геодезических методов Гаусса. Чтобы полностью пояснить их, он изучил триангуляцию Пруссии, описанную в неопубликованном наследии великого математика[1], а его проницательный ум смог разработать его. Тем самым ему удалось предохранить это крупное тригонометрическое измерение от опасности истощения ввиду обширных вычислений. Так обычно и происходило: при недостаточном понимании дела расширение объёма работ грозило стать препятствием любому прогрессу. Вместе с этим примечательным упрощением Шрейбер добился существенного повышения точности. Под его руководством Королевская прусская съёмка вскоре оказалась во главе всех подобных институтов и примером в организации тригонометрических работ других стран.

Шрейбер изучил и реформировал теорию и практику тригонометрических работ до малейших подробностей и его научные сочинения относятся к тем, которые каждый геодезист должен знать и полагать их на вершине своей науки. Они также стимулировали значительные исследования в близкой области, астрономии[2].

25 марта 1903 г. эта действенность побудила философский факультет Берлинского университета присвоить генерал-лейтенанту Шрейберу звание почётного доктора философии.

Каждый немецкий математик должен быть полностью удовлетворён тем, что Шрейбер развил руководящие идеи Гаусса для теории и практических приложений к геодезическим проблемам и повлиял на геодезические съёмки.

Прекрасную картину жизни покойного учёного нарисовал генерал-лейтенант в резерве Морсбах, его давнишний коллега и друг. Мы должны ссылаться на опубликованный им некролог [см. предыдущую статью] из которого я перенёс некоторые цифры. И здесь, опираясь на него, мы можем только несколько подробнее отдать должное научным достижениям Шрейбера.

[2] Большое место в его жизни заняло математическое описание конформного отображения сфероидической поверхности Земли на плоскость. Гаусс разработал подобное отображение и применил его в градусном измерении и в съёмке Ганноверского [королевства] для того, чтобы упростить вычисления, особенно включений пунктов низшего класса на плоскости в сеть более высокого класса, в плоских прямоугольных координатах. Соответствующие результаты Шрейбера (1866) были опубликованы с предисловием известного математика, Виттштейна[3].

И когда в 1868 г. он стал ответственным за прусскую триангуляцию, ему пришлось раздумывать, как применить проекцию Гаусса к более обширному району. Как видно из третьего тома его сочинения (1876), он вначале думал о применении сферической конформной проекции для включения триангуляции 1873 – 1874 гг. в полярной системе координат в существовавшую жёсткую систему. Но обещание, данное в Предисловии, вскоре опубликовать вывод необходимых формул, не было выполнено.

Действительно, Шрейбер придумал более подходящий метод для указанного включения и сразу же применил его в 1876 г. То была двойная конформная проекция (1897). Её первое краткое описание содержится в статье Jordan und Steppes, das deutsche Vermessungswesen (*Höhere Geodäsie und Topographie des deutschen Reiches*, W. Jordan, 1882), а полное изложение привёл сам Шрейбер (1899; 1900).

В проекции Гаусса для Ганновера средний меридиан отображался без искажения, но не так было в двойной проекции. В ней вначале конформно отображался сфероид на сферу, в точности по методу Гаусса, так что некоторая дуга параллели не искажалась. Затем по Гауссу поверхность сферы конформно отображалась на плоскость. Средний меридиан на сфере не искажался, но он не был истинным отображением своего положения на сфероиде, а потому и отображения на плоскости.

Поэтому в двойной проекции во всех окрестностях и в каждом направлении изменяется соотношение расстояний, тогда как при непосредственном проектировании они искажались только в направлениях на восток и запад.

Форма Пруссии такова, что это обстоятельство практически не имеет значения, но в двойной проекции арсенал формул гораздо благоприятнее. Даже на границах территории, где расстояния коротки, очень просто включать в сеть пункты третьего класса.

Плоские прямоугольные координаты служат лишь для уравнивания, и Шрейбер решил, что они практически не подходят для непосредственно трансформирования в также требуемые географические координаты. Как и длины сторон и азимуты, отображённые обратно на сфероид, эти координаты были вычислены по формулам, которые являлись сокращённым вариантом формул для сторон треугольников триангуляции первого класса[4]. Эти формулы Шрейбер опубликовал в 1878 г. в ясной и практически удобной форме.

Для основных треугольников все вычисления производились непосредственно на сфероиде.

[3] Усилия Шрейбера упростить включение пунктов в сеть при помощи конформной проекции сопровождались его заботой об упрощении и совершенствовании наблюдений направлений. Немецкие корифеи градусных измерений, Гаусс и Бессель, применяли различные методы. Гаусс наблюдал углы методом повторений, в том числе углы, которые не принадлежали к измеряемой сети триангуляции. И он наблюдал до тех пор, *пока каждый угол не получит своего должного* (Шрейбер, ZfV 1879, с. 141)[5].

Его практика стала, видимо, известной после повторных уравниваний, которые были вызваны накоплением наблюдений. Считалось, что результаты уравнивания были аналогичны множеству направлений, наблюдённых зараз с большим весом, что существенно упрощало уравнивание.

Бессель же, напротив, наблюдал направления, время от времени изменяя положение лимба[6]. На первый взгляд казалось, что этот метод предпочтительнее, потому что углы можно было измерять одновременно. Однако, как правило, это не удавалось, и требовалось сложное уравнивание на станциях. Точность снижалась, поскольку ошибки штрихов лимба исключались в недостаточной степени.

Тем не менее, полученные веса направлений применялись для уравнивания сети, что приводило к дальнейшим усложнениям и сомнениям. В 1871 – 1874 гг. при наблюдении сети триангуляции первого класса Шрейбер не стал наблюдать направления, а наблюдал углы, вначале для проверки экономии времени. Он

убедился и убедил других сотрудников отделения, что чисто вычислительное уменьшение веса при наблюдении углов сопровождалось незначительной потерей времени наблюдения, так что наблюдение углов было предпочтительнее ввиду преимуществ этого метода. С 1875 г. наблюдение углов стало общепринятым, и восхищения нельзя было отрицать. Последовавшее изменение и указания по поводу применения нового метода стали известны более широкому кругу геодезистов после публикации Шрейбера (1878). Его руководящая идея заключалась в том, что все возможные углы между всеми направлениями в основной сети триангуляции измерялись на каждой станции до тех пор, пока вес каждого направления перед уравниванием не становился примерно равным 24.

Каждый угол измерялся при каждом положении лимба в каждом положении трубы относительно вертикального круга, или (при двух микроскопах) в различных положениях, симметрично расположенных на соответствующих полукругах. Эти положения были различными для различных углов.

Во второй статье (1879) Шрейбер подробно описал преимущества своего метода[7] по сравнению с наблюдением направлений. Он указал на повышение точности, достигнутое при наблюдении при одном и том же положении лимба[8]. Метод Шрейбера угловых наблюдений при их распределении по лимбу не только намного лучше исключает ошибки градуировки лимба, нов гораздо большей степени обеспечивает условия успешного применения метода наименьших квадратов[9].

Существенная значимость наилучшей возможной градуировки горизонтального лимба побудила Шрейбера тщательно исследовать качество существующих градуировок, и он заказал в берлинской фирме Wannschaff специальное устройство для исследования лимбов. В остроумной статье (1886) он указал способ их удобного исследования, и Bruns (1892) опубликовал дополнение, особенно касающееся астрономов.

[4] В качестве начальника Съёмки с 1868 г. и тригонометрического отделения учреждённой Съёмки страны [Пруссии] с 1875 г. Шрейбер решил уделить особое внимание МНКв. После чьего-то случайного замечания он, видимо, не стал изучать эту вспомогательную науку более подробно, но теперь обратился к ней как геодезист, хорошо знакомый с потребностями рациональной практики. По отношению к обоснованию МНКв Шрейбер полностью принял новую точку зрения Гаусса.

При вычислениях [по МНКв?] и применении полученных результатов, он неизменно действовал весьма искусно. Интересным примером достигнутого существенного упрощения

вычислений служит редуцирование исходных уравнений с частично отрицательными весами при уравнивании координат[10].

Поистине великолепным было решение его собственной задачи о наиболее целесообразном распределении угловых наблюдений в базисной сети[11]. Шрейбер применил уравнивание условных уравнений по Гауссу (1828). Основательное изучение мемуаров Гаусса пригодилось ему. Даже сегодня многие из тех, кто в течение десятилетий применяют МНКв, к сожалению, ничего не знают об этом прекрасном мемуаре Гаусса[12]. Теоретически решение Шрейбера исключительно просто, но для его получения требуются попытки, что он объяснил примерами (1882). При своих наблюдениях 1880 г. он ещё не владел этим решением, но подошёл к нему своими попытками. В двух позднейших случаях, в 1884 и 1892 гг., он применил своё решение с небольшими отклонениями, которые были вызваны практическими причинами.

В теоретической статье, которая была навеяна публикациями Шрейбера и одной астрономической задачей, Bruns (1886) вывел наиболее целесообразное распределение весов для многих функций результатов наблюдений.

[5] Само собой очевидно, что Шрейбер обратил внимание и на базисные измерения. Съёмка Пруссии владела базисным аппаратом Бесселя и применяла только его. Шрейбер не собирался отказываться от этой практики, но во многом усовершенствовал действия с ним. Он таким образом ускорил базисные измерения при улучшении внутренней сходимости результатов. Дополнительной причиной улучшения было введение в уравнение базисных жезлов, длина которых зависела от температуры воздуха, квадратичного члена и члена, учитывающего скорость изменения температуры.

Средняя [квадратическая] случайная ошибка измерения оказалась несколько меньшей $1/4 \cdot 10^6$. Новое тщательное определение длин четырёх жезлов аппарата выявило погрешность более, чем в 0,01 линию (1 линия = 1/40 дюйма), причина которой оставалась неизвестной[13]. Но генерал Шрейбер понимал всю её важность, и во всяком случае суммарную ошибку можно было считать равной 1/600 000, что обеспечивало достаточную надёжность. Это было подтверждено совпадением результатов повторного измерения трёх базисов аппаратом Brunners, который принадлежал Геодезическому институту [в Потсдаме, учреждённому в 1886 г.].

[6] В мае 1888 г. непосредственное руководство тригонометрическим отделением Съёмки Пруссии перешло к другому лицу, потому что полковник Шрейбер стал руководить всей Съёмкой. В апреле 1893 г. по его желанию Шрейбера, уже

генерал-лейтенанта с 1890 г., перевели в резерв. Он переехал в Ганновер и посвятил своё время науке. Плодом его свободного времени стала, в частности, двойная конформная проекция. Но, к сожалению, это время всё более укорачивалось заболеванием.

С 1878 по 1903 г. я имел удовольствие повторно лично встречаться с этим прекрасным геодезистом, радоваться гостеприимству его дома и поражаться оригинальностью и глубиной его мысли. Его чарующая честность и очевидная целостность вселяли приятное ощущение, придавали нашим встречам специальную значимость и оставили в моей памяти ценнейший дар, который привёл меня к измерению Земли[14].

Примечания

1. Это наследие теперь опубликовано и переведено (Гаусс 1958, с. 209 – 227). Триангуляцию Королевства Ганновер он провёл в 1821 – 1825 гг.

2. Гельмерт не доказал этого утверждения.

3. Видимо, Th. Wittstein, автор книги (1867).

4. Только стороны? Заметим, что Гельмерт не упомянул ни геодезических четырёхугольников, которых изучал сам (Sheynin 1995, с. 77), ни других геодезических фигур.

5. См. также Gauss, *Werke*, Bd. 9, pp. 278 – 281. О наблюдении углов и направлений см. также Bradford (1948). Впрочем, мы эту статью не видели.

6. Подобные перестановки лимба недостаточны. Если число приёмов измерений, известное заранее, равно, например, 10, то лимб между приёмами следует переставлять на 18°.

7. Различие методов Гаусса и Шрейбера чётко не разъяснено.

8. Это непонятно.

9. Подобная рекомендация приводит к лучшему исключению систематических ошибок деления лимба.

10. Гельмерт так и не объяснил суть этого *интересного примера*.

11. В 1868 г. сам Гельмерт определил выгоднейшее распределение весов наблюдений в базисной сети в соответствии с важной теоремой линейного программирования (Sheynin 1995, pp. 78 – 79). Мы заметили, что при исследовании другой задачи и Гаусс в 1809 г., в § 186, фактически упомянул пример той же теоремы.

12. В более общем плане Эйзенхарт (Eisenhart 1964, с. 24) заметил, что *Существование второго обоснования МНКв* [у Гаусса], *видимо, практически не известно почти никому из его американских пользователей, за исключением студентов повышенных курсов математической статистики*.

13. Возможно, что основной причиной был недоброкачественный материал, из которого изготовили цинковые жезлы. Ф. Р. Г.

14. Гельмерт занялся этой важнейшей темой в 1906 г.

Библиография

О. Шрейбер

Сокращение: ZfV = *Zeitschrift f. Vermessungswesen*

1866, Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung.
1876, *Hauptdreiecke*, Bd. 3.
1878, Über die Anwendung von Horizontalwinkelbeobachtungen auf der Station. ZfV, No. 4.

1879, Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen. ZfV, No. 3.
1882, Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz. ZfV, No. 6.
1886, Untersuchung von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen. *Z. f. Instrumentenkunde*, Bd. 6.
1897, Die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abteilung der Kgl. Preußischen Landesaufnahme. См. Библиографию в [предыдущей статье].

Другие авторы

Bradford J. E. S. (1948), Method of observing primary horizontal angles. (*Empire*) *Surv. Rev.*, No. 67, pp. 222 – 226.

Bruns H. (1886), Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. *Abh. Sächs. Ges. Wiss.*, Math.-Phys. Kl., Bd. 13, No. 7, pp. 517 – 563.

--- (1892), *Astron. Nachr*., No. 3098 – 3099.

Eisenhart Ch. (1964), The meaning of “least” in least squares. *J. Wash. Acad. Sci.*, vol. 54, pp. 24 – 33.

Gauss C. F., Гаусс К. Ф. (1828), Теория комбинаций наблюдений, Дополнение. В книге автора *Избр. геод. соч.*, т. 1. М., 1957, с. 59 – 88.

--- (1958), О Ганноверской триангуляции. В книге автора *Избр. геод. соч.*, т. 2. М.

Sheynin O., Шейнин О. Б. (1995), Helmert’s work in the theory of errors. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 49, pp. 73 – 104.

---- (2013), Святой Федос. *Вопросы истории естествознания и техники*, № 1, с. 148 – 158.

Wittstein Th. (1867), *Mathematische Statistik*. Hannover. Частичный перевод: **S, G,** 85.

Творчество Шрейбера плохо изучено: вряд ли кто-нибудь серьёзно рассмотрел его статьи (а библиографические описания в начале XX в. недооценивались, что бросается в глаза при чтении обоих некрологов). По своему отношению к науке Шрейбер напомнил мне Красовского (Шейнин 2013), хотя различия в их задачах были громадными. Шрейберу не пришлось заботиться ни о картографировании громадной территории, ни о полевой работе в тяжёлых климатических условиях, и ему не пришлось опасаться жестокой, кровавой политической системы. Его заслуги были признаны военными властями, и ему было присвоено быть может высочайшее возможное для геодезиста воинское звание. Но вот, хоть он и заведовал кафедрой в военной академии и несомненно имел учеников, вряд ли кто-то из них стал крупным учёным.

V

А. Дмитриев

Статистики русского зарубежья

Вопросы статистики, № 7, 1996, с. 84 – 87

Русское зарубежье – странное и непонятное до последнего времени сочетание слов. Однако, сейчас мы уже привыкли к нему, но только начинаем открывать для себя страницы нашей истории, на которых лежало табу. Большой интерес представляет тот факт, что многие и многие учёные, эмигрировав, продолжали активно работать. Среди них немало и статистиков, уже достаточно известных к моменту эмиграции после событий 1917 г. Вот их имена: А. Н. Анцыферов, А. Д. Билимович, В. С. Войтинский, П. И. Георгиевский, Д. Н. Иванцов, С. С. Кон, В. А. Косинский, С. Н. Прокопович, А. Н. Челинцев, А. А. Чупров, Ф. А. Щербина

Когда гонимые на родине английские пуритане уходили в заморские края, они уносили с собой самое священное и самое ценное для них, именно Библию. Когда Ян Амос Коменский уходил в изгнание из разгромленной Чехии, он уносил с собой наброски своей Пансофии. Когда Наполеон на коне, окружённый блестящей свитой, входил в одни ворота Иены, в другие пешком уходил Гегель, неся под мышкой рукопись Феноменологии духа.

Подобным образом и русские учёные уходили в изгнание с пустыми руками, но полные сердцем. Они уносили с собой не сундуки, наполненные всяким хозяйственным добром, а священное пламя русского духа. И первой их заботой при водворении на чужбине было стремление не угашать этого духа, сохранить пламя и передать его идущему на смену поколению. Так возникли в разных местах очаги русского духа и русской культуры,

говорил в своей речи при открытии Русского научного института в Белграде в 1928 г. профессор А. И. Белич, председатель культурной комиссии [1].

Учёные стали постепенно собираться в группы и создали ряд научных центров: в Праге, Белграде, Париже и Берлине. Существовал и ряд небольших группировок: в Константинополе, Софии, Харбине, Великобритании, Швеции, Финляндии, Польше, Латвии. Для укрепления и передачи молодёжи уклада русской научной мысли периодически проводились общие съезды,

первый из которых состоялся в Праге в 1921 г.; всего таких съездов было пять.

Разнообразие форм работы статистиков русского зарубежья, обилие публикаций делает невозможным в данной статье всесторонний анализ их научной деятельности и фундаментальных трудов.

Алексей Николаевич Анцыферов (Анциферов), 1867 – 1943, экономист, статистик, кооператор, профессор Харьковского университета, известный своими работами *Курс элементарной статистики* (Харьков, 1908, ч. 1) и *Динамика населения* (Харьков, 1910), эмигрировал в 1920 г. в Лондон, а оттуда в Париж. Он внёс большой вклад в русскую зарубежную академическую жизнь. В 1922 г. по его инициативе создаётся Русский институт сельскохозяйственной кооперации в Праге [2]. Четыре года Анцыферов возглавлял его, затем руководил кафедрой сельскохозяйственной кооперации и кооперативной статистики. Был также одним из инициаторов создания Международного института по изучению социальных движений, председателем Русской академической группы в Париже. На Русском отделении юридического факультета при Парижском университете они вёл экономический семинар, читал лекции по методологии статистики и экономическому строю России. *Курс статистики* дважды переиздавался (?) в Праге в 1922 и 1929 гг. Анцыферов занимался и проблемами демографии, опубликовал статью *Nemesis* (демографический этюд) в *Записках Русского научного института в Белграде* (вып. 15, 1938).

В Прагу эмигрировал и **Павел Иванович Георгиевский, 1857 – 1938,** ученик Ю. Э. Янсона, известный профессор Петербургского университета, возглавлявший в 1911 – 1914 гг. Центральный статистический комитет Министерства внутренних дел, а в 1914 – 1917 гг. – статистический совет МВД. Находясь в России, он занимался проблемами международной хлебной торговли, экономикой железных дорог, политической экономией.

В эмиграции он подготовил работы: *Отчёт о переписи русских студентов в Чехословакии, Общественность в народном хозяйстве, Предложения Международному статистическому институту организовать статистику туризма* и др. Георгиевский был профессором Русского юридического факультета в Праге, активно сотрудничал с *Экономическим кабинетом* проф. С. Н. Прокоповича.

Интересна судьба ещё одного эмигранта, **Владимира Савельевича Войтинского, 1885 – 1960**, в прошлом революционера, экономиста и статистика.

Все, кто жил в России в начале этого века, и кто пережил войну и революцию, прожил, в сущности, не одну, а несколько

жизней. Но всё же, мало кто пережил столько жизней, сколько довелось пережить В. С. Войтинскому,
писал о нём В. Станка [3].

Окончательно порвав с большевиками в 1917 г., в начале 1918 г. при помощи И. Церетели он сумел пробраться в Грузию. После падения правительства свободной Грузии в 1922 г. Войтинский переехал в Берлин. Здесь он работал над многотомным статистическим изданием *Мир в цифрах*. Представив свой проект издательству *Знание*, которое специализировалось на выпуске литературы на русском языке, и получив положительное заключение о проекте от В. И. Борткевича, он решил делать не только русское, но и немецкое издание. Русское издание не имело успеха и после двух томов было прекращено вследствие запрета большевиками ввоза книг из-за границы. В 1925 – 1928 гг. вышло семь основных томов и один дополнительный, посвящённый Германии.

Издание стало необходимой книгой во всех более или менее значительных библиотеках Германии и во всех крупнейших библиотеках мира [4].

После прихода Гитлера к власти Войнович переехал в Швейцарию, а оттуда – в США, где вёл активную научную работу и вместе с женой подготовил на английском языке капитальный труд *Население и производство мира* (1953) и *Торговля и государственная организация мира* (1955).

В 1917 г. прервалась в Петроградском политехническом институте деятельность **Александра Александровича Чупрова, 1874 – 1926 [**5]. Из выступления В. Э. Дена на торжественном заседании Совета экономического факультета Ленинградского политехнического института 30 мая 1926 г., посвящённом памяти учёного [6] следует, что Чупров весной 1917 г. по окончании учебных занятий, как всегда уехал за границу и поселился в Стокгольме, где продолжал начатую раньше работу о влиянии войны на рождаемость и смертность населения. К началу учебного года, в сентябре 1917 г., он намеревался вернуться в Петроград, но приступ болезни помешал ему это сделать. В течение 1918 г. Советское правительство несколько раз обращалось к Чупрову с предложением прибыть в Москву для участия в организации Центрального статистического управления, но он не отозвался.

Несколько лет Чупров жил в Швеции, затем в Германии (в Дрездене). Выезжал он оттуда лишь для научных докладов и лекций: в 1922 г. – в Лейпциг для чтения лекций в Союзе актуариев; в 1924 г. – в Копенгаген для чтения курса по теории корреляции; в 1925 г. – в Прагу, для чтения лекций на курсах,

организованных *Экономическим кабинетом* С. Н. Прокоповича; и в Рим на сессию Международного статистического института.

В этот период Чупров написал следующие работы: *Инфляция – дефляция* (1922), *О математическом ожидании частного двух независимых переменных* (1922), *Основные задачи стохастической теории статистики* (1924), *Стохастическая связь и функциональная зависимость* (1925), *Основные проблемы теории корреляции* (1925) [7], *Половой состав родившихся как предмет статистического исследования* (1925) и другие.

После смерти Чупрова, 27 апреля 1926 г., в Праге состоялось публичное заседание *Экономического кабинета*, посвящённое его памяти, на котором выступили В. А. Розенберг и С. С. Кон [8].

В эмиграции оказался и **Оскар Николаевич Андерсон, 1887 – 1960 [**9]. Ученик А. А. Чупрова, получивший блестящее математическое образование в Казанском университете[1] и экономическое – в Петербургском политехническом институте. В 1918 г. он переехал в Киев, преподавал в Киевском университете и работал ассистентом в Демографическом институте при Киевской АН у М. В. Птухи. Затем через Константинополь эмигрировал в Будапешт, а оттуда – в Варну. В 1924 г. он стал профессором Варненского коммерческого института, где читал курсы теоретической статистики, экономической географии и финансов.

В 1933 г. при поддержке фонда Рокфеллера Андерсон начал работать над фундаментальным трудом *Einführung in die mathematische Statistik*.Wien, 1935. Он (вместе с Р. Фришем, И. Фишером и Я. Тинбергером) был инициатором создания Международного эконометрического общества (1930), членом которого оставался до конца жизни. В 1936 г. в качестве приглашённого профессора Андерсон читал лекции в Лондонской школе экономики. С 1942 г. он преподавал статистику в университете в Киле, а с 1947 г. – в Мюнхенском университете. Он занимался проблемами конъюнктурной статистики, теорией корреляции, теорией индексов, применением выборочного метода в экономических и социологических исследованиях [10].

В 1934 г. в Болгарии при поддержке коммерческих банков и фонда Рокфеллера при Софийском университете был создан Статистический институт для экономических исследований, который возглавил Андерсон. Институт ставил основной целью изучение факторов колебания экономической конъюнктуры. В сферу деятельности института входило исследование финансовой системы, сельского хозяйства и таможенной политики страны. Штат института насчитывал всего восемь человек, но для

исследований привлекались внештатные сотрудники. В 1935 – 1940 гг. Институт издавал свои труды, *Трудове на Статистическия институт за стопански проучвания при Софийския държавен университет*, в которых публиковали свои работы Андерсон и другие покинувшие Россию статистики и экономисты. Институт был закрыт в 1946 г. [11].

В Прагу эмигрировал и другой ученик Чупрова, бывший доцент Тифлисского политехнического института **Станислав Салезиевич Кон, 1888 – 1933**. Ещё в 1917 г. вышла его небольшая работа *К вопросу о применении выборочного метода при разработке сельскохозяйственных переписей*, привлёкшая внимание статистиков.

В эмиграции он в качестве приват-доцента Русского юридического института в Праге вёл активную научную и педагогическую работу: читал лекции по теории статистики, много раз выступал с докладами на заседаниях *Экономического кабинета* Прокоповича, публиковал статьи в *Русском экономическом сборнике*, который тот издавал. Вот лишь некоторые из них: *Проблема промышленного производства и рынка в Советской России* (1925); *Опыт изучения дисперсии посевных площадей* (*к применению выборочного метода в сельскохозяйственной статистик*е) (1926); *К промышленной конъюнктуре* (1927); *К вопросу об оптимуме населения* (1927); *Капитальное строительство и основной капитал промышленности* (1929). В 1929 г. на чешском языке вышла книга Кона *Основы теории статистического метода*.

В 1920 г., после ликвидации Кубанской Рады, в Белград уехал её председатель, основоположник русской бюджетной статистики, член-корреспондент Российской АН **Фёдор Андреевич Щербина, 1849 – 1936**. Проживая с 1922 г. в Праге, Щербина состоял профессором статистики в Вольном украинском университете и в Украинской сельскохозяйственной академии в Подебродах, а в последние годы – профессором Пражского университета. Автор фундаментального *Сводного сборника по 12 уездам Воронежской губернии* (Воронеж, 1897), чьи *крестьянские бюджеты* послужили прототипом для всех подобных работ других российских статистиков.

В эмиграции в разные годы он опубликовал следующие книги: *Законы эволюции и русский большевизм*; *История статистики*; *Курс статистики* и др. Несмотря на свой преклонный возраст, Щербина продолжал работать на научно-педагогической почве, отдавая много времени заботам о своих молодых земляках-кубанцах, пребывавших за границей [12].

Владимир Андреевич Косинский, 1866 – 1938, до революции профессор Рижского политехникума, Новороссийского

университета, Киевского политехнического университета, автор оригинальной работы *О приёмах научной обработки статистических данных* (М., 1890), о которой А. А. Кауфман [13] писал, что книга занимает

Самостоятельное место в русской статистической литературе периода, предшествующего проникновению в Россию влияния Лексиса.

После октябрьских событий 1918 г. стал товарищем министра труда в правительстве гетмана Скоропадского. После ликвидации Рады был вынужден эмигрировать в Прагу, затем в Ригу и преподавал в Рижском университете. В Праге он читал лекции по теории кооперативного кредита в Р В 1922 – 1924 гг. в Праге вышли два тома *Оснований политической экономии*, а в *Русском колоколе* (1928, № 6) были напечатаны *Очерки по русскому аграрному вопросу* как продолжение исследований по аграрным экономическим проблемам, начатым [Косинским] ещё в России.

Дмитрий Николаевич Иванцов, 1886 – 1967, бывший приват-доцент Харьковского университета и профессор Новоалександрийского института сельского хозяйства, опубликовал в 1913 г. работу *Об устойчивости русских урожаев* и в 1915 г., *К критике русской урожайной статистики*. Они были посвящены достоверности русских материалов урожайной статистики.

Он был вынужден переехать в Прагу, где с 1923 по 1930 гг. работал профессором Русского института сельскохозяйственной кооперации и доцентом Русского юридического факультета. В 1946 – 1947 гг. он был профессором Мюнхенского университета, затем перебрался в США, читал лекции в Фордемском и Колумбийском университетах. Находясь в эмиграции, Иванцов написал множество работ, в том числе *Промышленность и восстановление крестьянского хозяйства* (1924); *К вопросу о природе кооперации* (1925); *Очередные задачи теории цены* (1927). В последние годы активно сотрудничал с *Новым журналом*, печатая там публицистические статьи о проблемах сельского хозяйства СССР.

Профессор Киевского университета **Александр Дмитриевич Билимович, 1876 – 1963**, известный больше как экономист, эмигрировал в Югославию и с 1920 по 1940 гг. заведовал кафедрой политической экономии в Люблнском университете, занимаясь методами изучения экономической конъюнктуры. В *Трудах четвёртого съезда Русских академических организаций за границей* (Белград, 1929, т. 1) опубликовал статью *Новые методы изучения конъюнктуры и экономический прогноз*, книгу на словенском языке *Наука о конъюнктуре* (Любляна, 1931), обширную статью *Вопрос о предсказании урожая* (1932), в

которой предложил метод определения урожая по ряду метеорологических данных путём криволинейной множественной корреляции.

В 1922 г. по распоряжению Ленина из России вместе с известными представителями российской интеллигенции был выслан **Сергей Николаевич Прокопович, 1871 – 1955**, известный экономист, публицист и политический деятель, министр торговли и промышленности, а затем министр продовольствия во Временном правительстве. Ещё в 1918 г. в Петрограде он опубликовал книгу *Опыт исчисления народного дохода 50 губерний Европейской России в 1900 – 1913 гг.*, которая явилась первой серьёзной попыткой определения народного дохода России [15].

В Берлине в 1923 г. он учредил *Экономический кабинет* [16], который стал издавать *Бюллетени*, знакомящие с явлениями хозяйственной жизни СССР. Переехав в Прагу, он продолжил свою деятельность и при поддержке чешского правительства издал 12 *Экономических сборников* и 136 *Бюллетеней*. В них активно печатались многие статистики-эмигранты. В этот период появились работы [чьи?] *Крестьянское хозяйство по данным бюджетных исследований и динамических переписей* (Берлин, 1924); *Народный доход и способы его учёта* (*Экономич. сб.*, 1926, № 6); *Познавательная ценность статистических рядов* (Прага, 1936).

В 1938 г., спасаясь от нашествия Гитлера, Прокопович переселился в Женеву и возобновил издание *Бюллетеня* на английском и французском языках, однако под давлением правительства вынужден был прекратить свои издания, а затем и вовсе покинул страну. Оказавшись в США, Прокопович активно работал над книгой *Народное хозяйство СССР* (Нью-Йорк, 1952, тт. 1 – 2). Она завершила 30-летнюю исследовательскую работу автора и стала своего рода энциклопедией советского хозяйства.

Трагично сложилась судьба **Александра Николаевича Челинцева, 1874 – 1962**, профессора сельскохозяйственной академии им. Тимирязева, одного из разработчиков аграрной реформы Временного правительства. В 1920 г. он эмигрировал в Сербию, затем в Чехословакию, вёл активную научно-исследовательскую работу в Русском институте сельскохозяйственной кооперации, выступил на заседаниях *Экономического кабинета* Прокоповича с докладами *Помещичье хозяйство в России перед революцией* (1924); *К вопросу о социальной природе крестьянства* (1925).

Опубликовал работы *Сельскохозяйственная география России* (Прага, 1924); *Аграрная реформа в Чехословакии* (Прага, 1925)

[17]. Возвратившись в 1925 г. в Советскую Россию, он в 1930 г. подвергся репрессиям по делу *Трудовой крестьянской партии*.

Целый пласт истории русской статистики ещё ждёт большого специального исследования. Восстановить имена, забытые на родине волей судьбы, благородная задача нынешнего поколения.

Литература

1. Спекторский Е. В. Десятилетие Русского научного института в Белграде (1928 – 1938). // Зап. Русск. научн. инст. в Белграде. 1938. Вып. 14. С. 6 второй пагинации.

2. Подробнее об институте см. Телицын В. Л. Первый и единственный: факты и размышления // Кооперация. Страницы истории. М., 1994. Вып. 4. С. 180 – 203. Также: Отчёт о деятельности Русского института сельскохозяйственной кооперации в Праге (Кооперация и сельское хозяйство. 1924. Вып. 1. С. 182 – 186.)

3. Станка В. В. С. Войтинский // Нов. Ж. 1960. № 61. С . 235.

4. Там же. С. 244.

5. О А. А. Чупрове см. монографию О. Б. Шейнина *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка.* (М., 1990), а также статью Б. И. Карпенко *Жизнь и деятельность А. А. Чупрова* (Уч. зап. по статистике. 1957. Т. 3. С. 282 – 317). О школе Чупрова см. Елисеева И. И. Статистическая школа А. А. Чупрова // Интеллектуальная элита Санкт-Петербурга. СПБ, 1994, ч. 2. Кн. 2. С. 47 – 53, также Елисеева И. И. Статистическая школа А. А. Чупрова // Вопросы статистики. 1995. № 2. С. 40 – 43.

6. Ден В. Э. Краткая биография и характеристика личности А. А. Чупрова // Изв. экономич. фак. Ленинградск. политехнич. инст. 1928. Т. 25. Вып. 1. С. 308 – 314.

7. Первоначально она вышла на немецком языке, в 1926 г. была издана в Москве на русском, а в 1939 г. – на английском языке в Лондоне.

8. См. Розенберг В. А. Несколько биографических черт // Русск. экономич. сб. Прага, 1926. Вып. 6. С. 5 – 15. Кон С. С. А. А. Чупров как учёный и как учитель // Там же. С. 15 – 33.

9. Подробная биография О. Н. Андерсона содержится в Fels E. Oskar Anderson. 1887 – 1960 // Econometrica.1961. Vol. 29. P. 74 – 78. Обзор работ: Рябикин В. И. О. Андерсон – ученик А. А. Чупрова // Уч. зап. по статистике. 1976. Т. 28. С. 161 – 174.

10. Основные работы Андерсона собраны в сб. Anderson O. Ausgew. Schriften. Hrsg. H. Kellerer u. A. Tübingen, 1963. Bde 1 – 2.

11. Енциклопедия България. София, 1988. Т. 6. С. 441.

12. Юбилей профессора Щербины // Руль. 1924. 27 февр. Щербина Ф. А. Последние новости. 1936. 30 нояб.

13. Кауфман А. А. Статистическая наука в России // Теория и методология. М., 1922. С. 107.

14. Косинский В. А. *Основные тенденции* … Прага, 1925. Ч. 2. С. vii.

15. Интересно, что в 1930 г. (!) в Советской России издаётся его книга *Народный доход западноевропейских стран* с предисловием С. Г. Струмилина.

16. Подробнее о Кабинете см.: Об Экономическом кабинете профессора С. Н. Прокоповича. Пять лет работы // Русск. экономич. сб. 1928. Вып. 12. С. 277 – 280.

17. Подробную библиографию работ Челинцева см. Вайнштейн А. Л. А. Н. Челинцев, 1874 – 1962 // Уч. зап. по статистике. 1964. Т. 8. С. 321 – 325.

Автор проделал большую и важную работу, но нельзя не согласиться с его окончательным выводом: нужно сделать много больше. О Чупрове мы рекомендуем обратиться взамен к нашей монографии, которую автор упомянул в своей библиографии [5], но недостаточно воспользовался ей. Ныне же она переиздана в значительно расширенном виде (Берлин, 2010). Там же читатель найдёт много больше об Андерсоне. Единственная советская публикация, посвящённая ему (Рябикин, см. [9]), несерьёзна. Свою библиографию автор оформил в соответствии с российским стандартом, который мы считаем отвратительным.

VI

Н. И. Идельсон

Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений

Москва, 1947

Введение. История проблемы (с. 7 – 17)

Прежде всего, остановимся на нескольких основных положениях, фактах и датах.

1. Приём, которым до обоснования способа наименьших квадратов (СНКв)[1] обычно пользовались при комбинации наблюдённых данных для получения наилучшего приближённого значения неизвестной, состоял в следующем. Допустим, что наблюдения доставили количества l_i для величины определяемой неизвестной X, умноженной на заданные коэффициенты a_i, т. е., что комбинируются n равенств, по необходимости приближённых, вида

$$a_i X \approx l_i. \qquad (1)$$

Старинная метода требовала изменить в (1) все знаки так, чтобы коэффициенты a_i оказались положительными, и принять

$$X = \sum l : \sum a. \qquad (2)$$

Коутс (1682 – 1716)[2] обосновал этот приём: каждое l_i отягчено неизбежной случайной погрешностью. Её влияние на определяемое значение X будет, очевидно, тем меньше, чем больше положительный коэффициент a_i. Поэтому Коутс принимает a_i за *массу* или *вес* соответствующего наблюдения, которое приводит для неизвестной приближённое значение […].

Лаплас называет этот приём *обычным* способом решения и противопоставляет ему *новый* СНКв. Впрочем, выражение (2) мы встретим и значительно позже, при изложении способа Коши. Основное затруднение в применении обычного способа возникало при переходе к системам приближённых равенств типа (1) со многими неизвестными. В этом случае рассуждение Коутса, очевидно, не могло привести к отчётливым правилам комбинации величин l_i, если их число превышало число неизвестных.

Между тем, в XVIII веке в астрономии были уже накоплены значительные ряды наблюдений планет, и никто, с сущности, не знал, как с ними поступить, чтобы извлечь из этого обширного материала поправки всего для шести элементов эллиптического движения каждой из больших планет. Такие же проблемы возникали и в геодезии после больших французских экспедиций в Лапландию и Перу для измерения градуса дуги меридиана.

2. Простое и изящное решение предложил в 1806 г. Лежандр (1752 – 1833)[3]. На нескольких страницах, могущих служить образцом законченности и ясности, он дал практике тот способ комбинации наблюдений, который без каких-либо изменений сохранился вплоть до наших дней. Он говорит, что, когда приходится извлекать возможно точные результаты из наблюдений, то обычно дело сводится к решению систем линейных уравнений, число которых превышает число неизвестных. Эти уравнения в точности не удовлетворяются наблюдёнными значениями, в их свободных членах остаются неустранимые погрешности. В подобных случаях неизбежен некоторый произвол в распределении погрешностей между отдельными подлежащими определению неизвестными:

Нельзя ожидать, что все гипотезы приведут к одному и тому же результату, но прежде всего нужно озаботиться о том, чтобы крайние ошибки, независимо от их знака, оставались заключёнными в наиболее узких пределах.

Из всех принципов, которые можно предложить для этой цели, не существует более простого, чем тот, которым мы пользовались в предыдущем изложении. Он состоит в том, чтобы обратить в минимум сумму квадратов погрешностей. При помощи этого правила между погрешностями устанавливается как бы некоторое равновесие, которое не позволяет крайним из них по величине оказывать преобладающее влияние. Таким образом, этот принцип вполне пригоден для того, чтобы раскрыть нам картину состояния всей системы, наиболее близкую к истине.

Далее Лежандр показывает, как на основе его метода в каждой задаче получить столько же *окончательных уравнений*, сколько имеется неизвестных. Этим как раз и устранялся основной недостаток обычного способа. Для систем с одной неизвестной типа (1) решение Лежандра, построенное на принципе

$$\sum(a_i X - l_i)^2 - \text{minimum},$$

немедленно приводило к значению

$$X = [al]:[aa]. \quad ([ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots, \text{символ Гаусса}) \qquad (3)$$

Выражение (3) можно было, конечно, получить по правилу Коутса, но считая его *массы* пропорциональными a_i^2.

Если все коэффициенты a_i равны 1, решения (2) и (3), обычное и новое, совпадают и дают одно и то же значение неизвестной, равное арифметическому среднему из всех наблюдённых количеств l_i.

3. Алгебраическая сторона способа Лежандра была развита до высокого совершенства Гауссом (1777 – 1855) через несколько лет после появления работы Лежандра[4]. Окончательные, или, как их обычно называют, нормальные уравнения Лежандра обладают свойством симметрии: коэффициенты при неизвестных по строкам совпадают с соответствующими коэффициентами по столбцам. Определитель системы положителен (исключая раз навсегда те особые случаи, когда он может быть равен нулю).

Решение такой системы линейных уравнений способом последовательного исключения неизвестных эквивалентно приведению некоторой квадратичной функции от неизвестных к её каноническому виду, в котором её выражение содержит только квадраты переменных, но не их произведения. Сущность алгоритма (т. е. правила последовательности операций) Гаусса и состоит в такой редукции квадратичной функции, которая соответствует системе нормальных уравнений Лежандра и служит выражением для суммы квадратов погрешностей, приведённой к минимуму.

Схематизируя этот алгоритм, Гаусс ввёл обозначения и символику, которые применяются до сих пор и сделались неотъемлемой частью всего изложения СНКв.

4. В 1809 г. появилось сочинение Гаусса *Теория движения* … Он дал методы определения шести элементов эллиптического движения по трём или бОльшем числами наблюдений. Эти методы, кстати сказать, были лишь несущественно видоизменены в дальнейшем развитии науки и вычислительной техники. Целый отдел книги (§§ 172 – 189) относился именно к той проблеме, которая, как уже было сказано, имела столь большое значение для астрономии, и которая стала особенно острой после открытия первых малых планет на рубеже XIX столетия. В этом отделе Гаусс вероятностно обосновал СНКв. Сущность (ограничивая здесь изложение системами с одной неизвестной типа (1)) состояла в следующем.

Наилучшим приближённым значением неизвестной является, действительно, значение (3), полученное по правилу Лежандра. Но таковым оно является потому, что ему соответствует бОльшая вероятность, чем любой другой линейной комбинации наблюдённых значений.

Введя это новое условие о наибольшей вероятности, и при некоторых других допущениях, Гаусс установил, прежде всего, что вероятность появления в каждом наблюдении случайной погрешности, величина которой заключена в бесконечно малом интервале от данного ε до ε + *d*ε и пропорциональна произведению дифференциала *d*ε на функцию

$$f(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2\varepsilon^2), \qquad (4)$$

где *h* есть постоянная вероятностного происхождения. Эту постоянную Гаусс назвал *мерой точности* данного ряда наблюдений (предполагаемых здесь равноточными).

Но более того, Гаусс показал (и в этом заключается важнейшая часть его открытия) следующее.

Пусть *u* есть результирующая случайная погрешность определения *X*, которое получается по правилу Лежандра, т. е. значения (3). Вероятность того, что величина этой погрешности заключена в интервале от данного *u* до *u* + *du*, равна произведению *du* н*а функцию того же самого вида, как* (4), *а именно*

$$f_1(u) = (H/\sqrt{\pi})\exp(-H^2u^2),\ H = h\sqrt{[aa]}. \qquad (5a, b)$$

Постоянная *H* называется мерой точности результирующего значения *X*, а [*aa*], его весом. Таким образом, мера точности результата увеличивается по сравнению с мерой точности отдельных наблюдений в $\sqrt{[aa]}$ раз, и нетрудно показать, что это возрастание есть наибольшее возможное для любой линейной комбинации заданных a_i. С другой стороны, функция $f_1(u)$ очевидно достигает своего наибольшего значения при *u* = 0, т. е. *если придать неизвестной X как раз лежандрово значение* (3).

К тому же, значение $f_1(u)$ при *u* = 0

$$f_1(0) = (H/\sqrt{\pi}) = h\sqrt{[aa]}\,/\sqrt{\pi} \qquad (6)$$

пропорционально *H*. Таким образом, оказывается (если принять дополнительные условия Гаусса), что *СНКв приводит к тому значению неизвестной, которое обладает одновременно и наибольшим весом, и наибольшей вероятностью* (теорема Гаусса; её подробное доказательство см. на с. 261 – 266).

Если все a_i = 1, мера точности наиболее вероятного значения, каковым является среднее арифметическое из наблюдённых l_i, возрастает в $\sqrt{n}$ раз по сравнению с мерой точности каждого

отдельного наблюдения. Это придавало новый смысл правилу арифметического среднего.

Философское, или, как Гаусс писал впоследствии, *метафизическое* оправдание требования о наибольшей вероятности результата (которое, конечно, совершенно условно и априорно[5]) Гаусс находил тогда в *аксиоме*, согласно которой в случае равноточных наблюдений, произведённых в одинаковых условиях, именно арифметическое среднее из наблюдений, всегда принимается за наиболее вероятное значение неизвестной. Мы видели, правда, что оно вводится и в старую методу Коутса, и в новую методу Лежандра.

Но сказать, что это правило принимается всеми ещё не значит его обосновать, так как у всех может быть и не имеется достаточного представления о том, что такое закон случайных погрешностей (Пуанкаре)[6].

5. Изложив своё вероятностное решение, Гаусс (§ 186) сказал, что правило о минимуме суммы квадратов разностей между наблюдёнными и вычисленными значениями неизвестных можно вывести и из более простых соображений, не связанных с теорией вероятностей. Здесь он, в сущности, только несколько развивал и видоизменял уже известные нам соображения Лежандра; он включил следующую фразу:

К тому же, этот принцип, которым мы пользовалась уже с 1795 г., недавно был установлен Лежандром в его сочинении …, где выясняются и некоторые другие особенности этого принципа, которые мы здесь ради сокращения опускаем.

Не подлежит никакому сомнению, что Гаусс действительно уже с 18-летнего возраста (с 1795 г.) владел СНКв. В этом убеждают документы и переписка. Мало того, получив книгу Лежандра, Гаусс писал в 1806 г. Ольберсу[7]:

По-видимому, такова моя судьба – сталкиваться с Лежандром во всех моих теоретических работах. Так было с высшей арифметикой, в исследованиях о трансцендентных функциях, связанных со спрямлением дуги эллипса, с обоснованием геометрии, а теперь и здесь: например, принцип, которым я пользуюсь с 1794 г., а именно: для того, чтобы наилучшим образом представить несколько величин, которым нельзя дать точных значений, нужно привести к минимуму сумму квадратов (разностей), *применяется также в работе Лежандра и излагается в ней весьма основательно*.

Но наряду с этим, не может подлежать сомнению и то, что приведённые слова Гаусса из § 186 *Теории движения* должны были немало огорчить Лежандра, о чём он[8] и написал откровенно Гауссу. Положение действительно несколько осложнялось тем, что ещё в 1803 г. Гаусс применил в печати такой же оборот речи,

и тоже в отношении Лежандра, по поводу одной весьма важной теоремы по теории чисел. Всё это могло возбудить известные разговоры в академиях Европы, особенно в Париже. Лаплас[9], например, пересылая в 1810 г. Гауссу (на 28 лет младшему) свои только что появившиеся мемуары по теории вероятностей, в сопроводительном письме сообщил:

Господин Гаусс указывает в своём сочинении об эллиптическом движении, что он владел (этим способом) *до опубликования его Лежандром. Я бы очень хотел знать, было ли об этом способе что-либо напечатано в Германии до этой публикации, и прошу г. Гаусса не отказать уведомить меня об этом.*

В своём ответе, подробном и исключительно ценном для нас, Гаусс[10] в заключительной части письма сообщил Лапласу, ссылаясь на различных астрономов, что он пользовался этим способом с 1795 г.; что в его бумагах имеется запись от 1798 г., где говорится о сближении этого способа с теорией вероятностей; что особенно часто он применял его с 1802 г.,

Когда пользовался им, можно сказать, ежедневно в астрономических вычислениях, относящихся к новым планетам. … Я и не думал, что г. Лежандр может придавать такое значение столь простой идее, что нужно скорее удивляться тому, что до неё не дошли 100 лет назад, чем огорчаться по поводу моего сообщения о том, что я пользовался ей раньше него.

6. В 1812 г. вышло первое издание *Аналитической теории вероятностей*[11] Лапласа (1749 – 1827). Этот огромный том заключает как бы синтез всего творчества Лапласа по теории вероятностей. Однако, ближайшей причиной составления всего трактата явилось одно фундаментальное открытие, сделанное Лапласом лишь около 1808 – 1809 гг. Интересно услышать по этому поводу то, что в 1850-х годах говорил французский математик Бьенеме[12]:

Действительно, Лаплас сразу же осознал всю важность своего открытия. Только лишь придя к нему, он доложил о нём (в Парижской академии наук) *и сообщил, что опубликует трактат по вероятностям. С 1770 по 1809 гг., в течение почти сорока лет, Лаплас публиковал многочисленные мемуары о вероятностях. Но, каков бы ни был их интерес, Лаплас не хотел объединять их в общую теорию. Однако, как только он установил свойства функции вероятностей, ясно увидел, что это – принцип, объемлющий почти все приложения и составил свой трактат.*

В чём состояла сущность открытия Лапласа, изложено здесь в гл. 10. По отношению к задаче о наилучшей комбинации

приближённых равенств вида (1), его результат состоял в следующем. Пусть наилучшее приближённое значение неизвестной x_0 принято в виде линейной функции наблюдённых значений l_i, так что

$$x_0 = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n, \qquad (7)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – пока ещё не определённые постоянные коэффициенты.

Не делая никаких предположений о виде функции $f(\varepsilon)$, которая определяет вероятность случайной погрешности отдельных наблюдений и допуская только, что число наблюдений l_i неограниченно возрастает, можно утверждать (при некоторых условиях относительно коэффициентов α_i) следующее.

Вероятность P_n, что случайная погрешность выражения (7) лежит в пределах от 0 до u (каково бы ни было значение u), стремится при $n \to \infty$ к пределу

$$\frac{K}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-K^2 u^2) du, \; K = h \div \sqrt{[\alpha\alpha]}. \qquad (8; 9)$$

Здесь по-прежнему h – мера точности данного ряда. В этом и состоит *предельная теорема* Лапласа, применённая к теории комбинаций равенств (1). (Подробнее см. с. 258 – 261 [о нормальном законе и СНКв].)

Интеграл (8) возрастает при увеличении K. Если задать u произвольно и потребовать, чтобы P приняло наибольшее возможное значение, будет необходимо определить коэффициенты α_i так, чтобы K оказалось максимальным.

Учитывая, что эти коэффициенты связаны условием $[a\alpha] = 1$, которое легко выводится из равенств (1) и (7), и решая по известным правилам задачу на относительный максимум K, мы прежде всего находим

$$\alpha_i = \frac{a_i}{[aa]}. \qquad (10)$$

Подставляя этот результат в (9), получаем

$$K_{\max} = h\sqrt{[aa]}. \qquad (11)$$

Сопоставляя с (5), мы видим, что максимальное лапласово K равно гауссову H. Но это H, как сказано выше, есть вообще

наибольшее возможное. Кроме того, при подстановке выражений α_i в (7) это последнее облекается в лежандрову форму (3).

Таким образом, отыскивая абсолютный максимум предельного интеграла при любом значении *u*, Лаплас получил новое вероятностное обоснование СНКв. Мы здесь должны с особой силой подчеркнуть различие фундаментальных концепций Гаусса и Лапласа: у Гаусса речь идёт о наибольшей вероятности некоторого данного значения *X* (которое соответствует значению $u = 0$), а у Лапласа вводится требование наибольшей вероятности того, что *X* лежит в пределах от x_0 до $x_0 + u$ при произвольном *u*.

Особенно важной является независимость результата Лапласа от закона погрешностей отдельных наблюдений. Этим он открыл новую эпоху в математической статистике, в теории комбинации наблюдений и т. п[13]:

Если рассматривать большое число наблюдений, как это чаще всего встречается в астрономических исследованиях, то выбор этих систем (*окончательных уравнений* для неизвестных) *делается независимым от этого закона. И из предыдущего видно, что анализ непосредственно приводит в этом случае к результатам СНКв погрешностей наблюдения*.

Но вместе с тем поразительной оказывается *таинственная связь* (Бьенеме) между подынтегральной функцией предельного интеграла Лапласа (8), а именно функции

$$f_2(u) = \frac{K}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-K^2u^2)du\,,$$

с функцией Гаусса $f_1(u)$ в (5). Обе они просто совпадают при надлежащем определении постоянных *K* и *H*. Причины этого обстоятельства, действительно изумительного, если учесть коренное различие основных предпосылок Гаусса и Лапласа, лежат в очень глубоких и исключительных свойствах закона Лапласа – Гаусса. Эти свойства соответствуют так называемой предельной теореме Лапласа – Чебышёва. Они раскрыты полностью лишь недавно, см. с. 253 – 255[14].

6. В одной из своих ранних работ Лаплас[15] обратил внимание на априорно возможную форму выражения вероятности случайной погрешности. Он принял её равной

$$f_3(u) = (k^2/2)\exp[-k^2|\varepsilon - \varepsilon'|] \qquad (13)$$

где k^2 – постоянная, а $|\varepsilon - \varepsilon'|$ означает абсолютное значение разности между данным значением ε и их *медианой*. Очевидно, что наибольшей вероятностью обладает именно значение ε, совпадающее с медианой.

Так как первое упоминание о функциях вероятности типа $\exp(-h^2\varepsilon^2)$ встречается только в одной из следующих работ Лапласа[16], то имеются предложения называть закон (13) *первым законом Лапласа*, а закон (4), его *вторым законом*. За последнее время первый закон вновь привлёк внимание[17], несмотря на некоторые очевидные трудности, возникающие при его применении (например, медиана суммы не равна сумме медиан).

8. Во всяком случае, начиная с 1819 г., как это видно из его переписки, ни его собственное обоснование, вытекающее из априорного требования наибольшей вероятности, ни обоснование Лапласа, предполагающее неограниченное возрастание числа наблюдений, не удовлетворяли Гаусса. В последующее десятилетие Гаусс создал совершенно новый метод комбинации наблюдений. Эта вторая метода изложена в мемуаре, который обычно называется *Большим*[18].

Он состоит из трёх частей: первая (§§ 1 – 22) заключает общую теорию, метод исключения неизвестных, веса. Вторая (§§ 23 – 40) – редукцию квадратичной формы, которая соответствует нормальной системе, веса линейных функций и знаменитую формулу для средней [квадратической] ошибки единицы веса. Третья часть, *Дополнение*, содержит в основном всё обоснование и развитие геодезического (коррелатного) уравнивания (§§ 1 – 22). Она заканчивается двумя примерами с численным приложением к нидерландской триангуляции (§ 23) и к ганноверской триангуляции (§ 24), выполненной, как известно, самим Гауссом[19].

Из многообразных условий комбинаций наблюдений, с которыми мы встречались выше, Гаусс оставляет во второй методе только одно: *комбинировать наблюдения так, чтобы мера точности результата была наибольшей*. Отпадают, стало быть, все указанные затруднения, связанные как с первой методой, так и с методом Лапласа, *но практический результат получается тождественным во всех трёх случаях*. Действительно, тезис: H – максимум (или, что то же самое, минимум средней [квадратической] ошибки результата или максимума его веса) в первой методе Гаусса появляется как следствие других предпосылок, а в методе Лапласа – как условие комбинации наблюдений. Поэтому во всех трёх системах практический алгоритм действий есть тот же СНКв.

Мотивы, по которым Гаусс остановился на этом критерии комбинации наблюдений (§ 6 *Теории комбинации*), мы полностью указали на с. 70 – 71, а выдержка из позднейшего весьма важного письма Гаусса Бесселю 1839 г. на ту же тему см. с. 268. Самый метод Гаусса, который Марков (1856 – 1922) довёл до высшего логического и математического совершенства[20], мы излагаем в

гл. 4, 5, 7 и 8. Здесь же мы ограничиваемся одним замечанием. Критерий максимума *H* приводит к тем же самым значениям неизвестных, что и принцип Лежандра, см. (3; 7; 10).

Но мы не можем доказать, что из этого условия непосредственно вытекает условие минимума суммы квадратов погрешностей. Первое имеет вероятностный характер, второе же – алгебраическое, и перехода от одного к другому не существует. Поэтому мы только устанавливаем в каждой отдельной задаче уравнивания, что результаты оказываются одинаковыми при обоих обоснованиях решения. Это очень отчётливо проводится Марковым[21].

9. В 1850-х годах в Парижской академии наук состоялся ряд выступлений, так или иначе относящихся к СНКв. Коши (1789 – 1857) и Леверрье (1811 – 1877) выдвигали методы, приблизительно эквивалентные СНКв, но более простые и гибкие, особенно для обработки систем с очень большим числом уравнений. В основном задача ставилась о возможных значениях коэффициентов в выражениях неизвестных (7) и об оценке приближения на каждой стадии исключения неизвестных.

В способе Коши[22] эти коэффициенты всегда равны ± 1. Для случая одной неизвестной это условие возвращает нас к формуле Коутса (2). Леверрье[23] предлагал другие варианты. Мемуар Бьенеме (см. прим. 12) был написан как критика этих предложений, автор строго стоял на позициях Лапласа и сделал ряд принципиальных указаний, см. наш § 32, а метод Коши см. с. 151 – 160.

10. Проблема *закона больших чисел* и обоснование СНКв играют весьма существенную роль в творчестве Чебышёва (1821 – 1894) и Маркова. Не касаясь здесь фундаментальных работ Чебышёва по теории вероятностей, заметим, что он опубликовал ряд мемуаров об интерполировании по СНКв[24]. В них заключается переход от классического применения этого способа к более общим и широким задачам *квадратического приближения*, т. е. построения функции определённого вида (например, многочлена), которая на данном конечном или бесконечном множестве значений давала бы наилучшее приближение к заданной совокупности значений приближаемой функции. Оценка качества аппроксимации производится по сумме квадратов остающихся погрешностей[25].

Значение работ Маркова для общей постановки СНКв уже достаточно подчёркнуто выше. Заметим здесь, что самомУ закону распределения случайных погрешностей Марков придавал сравнительно второстепенное значение[26].

11. Существует ли вообще подобный закон? Если существует, то есть ли это закон Лапласа – Гаусса, находящий свою прочную

основу в общих условиях предельной теоремы Лапласа, как первым указал на это Пуанкаре[27]? Или, напротив, этот закон теоретически обоснован неудовлетворительно, как утверждает ведущий английский геофизик-теоретик Джеффрис[28], и потому не может представлять распределение погрешностей в больших рядах (в тысячу или несколько тысяч наблюдений), на что первым указал авторитетнейший астроном Ньюком[29]?

Если так, какие поправки надо внести в него? Те ли, в которых закон Лапласа – Гаусса остаётся первым приближением и только подвергается *возмущающему действию* факторов, несовместных с условиями предельной теоремы Лапласа (направление, начало которому положил ещё Пуассон[30], но завершил только шведский астроном Шарлье[31]), или, напротив, нужно оставить закон Лапласа – Гаусса в стороне, снова обратиться к исходным положениям теории вероятностей и искать выражение для закона распределения случайных погрешностей в общих схемах математической статистики, как это делают Джеффрис и его школа? Таковы проблемы современной теории математической обработки наблюдений. Краткий отчёт о них см. в нашей гл. 11. [См. наше особое примечание.]

12. Методика изложения СНКв непрерывно изменялась. Начиная от Лежандра, через Гаусса и Лапласа и вплоть до наших дней продолжается её углубление и совершенствование. Так, выдающийся математик-астроном Андуайе[32] дал её полное развитие на основе глубоких методов теории квадратичных форм, в наши дни Колмогоров[33] показал, что всё изложение СНКв можно существенно упростить, если применить линейную векторную алгебру и воспользоваться её основными понятиями, например, ортогональностью. Эти приёмы мы кратко сообщим в § 12, и с их помощью он весьма сжато и прозрачно вывел все основные формулы гауссова алгоритма для СНКв. В той же работе он привёл некоторые новые результаты оценки надёжности выводов, получаемых по СНКв, допустив, что случайные погрешности наблюдений подчинены нормальному закону Лапласа – Гаусса, см. последние страницы нашей книги.

Библиография и примечания

1. Термин *метод наименьших квадратов* привился после статьи Колмогорова (1946), см. прим. 33. Идельсон пару раз употребил новый термин, но мы посчитали это ошибкой и не обратили на неё внимания. О. Ш.

2. Cotes R. (1712), Aestimatio errorum in mixta mathesis … *Opera misc*. London, 1768, pp. 10 – 58. Н. И.

Автор описал рекомендацию Коутса по Лапласу, на самом же деле Коутс не сформулировал своего правила достаточно ясно. См. § 7.3.1 источника

Шейнин О. Б. (2019), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. М.

S, G, 11.

Имеется перевод Коутса:

Gowing R. (1983), *Roger Cotes – Natural Philospher*. Cambridge. О. Ш.

3. Legendre A. M. (1805), *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris, pp. 72 – 80. Н. И.

Рассуждение Лежандра не было ни *законченным*, ни *ясным*. Не СНКв, а метод минимакса обеспечивает минимальность наибольшего по абсолютной величине остаточного свободного члена, который Лежандр (как, впрочем, и Лаплас) называл погрешностью. О. Ш.

4. Гаусс К. Ф. (1810, латин.). Исследование об эллиптических элементах Паллады. В сборнике переводов Гаусса, упомянутом в прим. 31, с. 111 – 120. Н. И.

5. Первый русский перевод (Догель, 1861). Н. И. Этот перевод упомянут в каталоге книг Библиотеки Российской Академии наук. О. Ш.

6. Poincaré H. (1896), *Calcul des probabilités*. Paris, 1912, § 127. Н. И.

7. Письмо 30.7.1806, см. Gauss *Werke*, Bd. 8, p. 139. Н. И.

8. Письмо Лежандра 31 мая 1809 г. (Gauss, *Werke*, Bd. 10, p. 380). Оно заканчивается словами:

Вы слишком богаты собственными фондами, чтобы в чём-либо и кому-либо завидовать. И я, впрочем, вполне уверен в том, что мне приходится огорчаться только из-за оборота Вашей речи, а не из-за Вашего намерения.

Но через 12 лет, когда в 1821 г. появилась вторая часть работы Лежандра о кометных орбитах, к ней была подклеена страница, на которой анонимный автор очень едко (и довольно наивно повторяя слова Лежандра из его письма, см. выше), говорил о Гауссе и о случаях, связанных с приоритетом Лежандра.

Гаусс никогда не отвечал ни на что подобное, и 3 декабря 1831 г. написал Шумахеру (Gauss, *Werke*, Bd. 8, p. 138):

Это (публичное выступление Гаусса или его друзей) *означало бы признать, будто моё указание* (в *Теории движения*) *о том, что я многократно применял этот метод с 1791 г., нуждается в оправдании, с чем я никогда не соглашусь*. Н. И.

9. Письмо Лапласа Гауссу 15 ноября 1811 (Gauss, *Werke*, Bd. 10, p. 380). Н. И.

10. Письмо Гаусса Лапласу 30 января 1812 г. Оно целиком относится к теории вероятностей, что было вызвано получением двух мемуаров Лапласа от 1810 г. Гаусс благодарит за их присылку, затем сообщает об одной задаче теории вероятностей, которой он занимался лет за 12 раньше, но не смог найти удовлетворительного решения.

Быть может Вы удостоите ей несколько минут Вашего внимания, и я уверен, что в таком случае Вы найдёте более полное решение.

Задачу Гаусса только в наши дни решил ленинградский профессор Р. О. Кузьмин. Всё это письмо Гаусса исключительно интересно (Gauss, *Werke*, Bd. 10, pp. 371 – 374). Запись 1798 г., о которой говорится в письме, действительно сохранилась в Дневнике Гаусса. Под датой 17 июня 1798 г. значится: *Исчисление вероятностей, защищённое от Лапласа*. Подробный комментарий см. Gauss, *Werke*, Bd. 10, p. 533 и прим. 13. Н. И. По поводу задачи Гаусса см. Шейнин (2019, § 10A). О. Ш.

11. Laplace P. S. (1812), *Théorie analytique des probabilités. Oeuvr. Compl.*, t. 7. Paris, 1886. Н. И.

12. Bienaymé I. J. (1853), Considérations à làppui de la découverte de Laplace sur le loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. Перепечатка: *J. math. pures appl.*, t. 12, 1867, pp. 158 – 176.

О том, что Лаплас приступил к созданию своего трактата, было достаточно хорошо известно. Гаусс упомянул об этом в письме Лапласу 30 января 1812 г. Н. И.

13. Laplace P. S. (1812/1886), с. 353. Изложив сущность правила Лежандра, Лаплас добавляет:

Но в отношении г. Гаусса справедливость требует заметить, что он за несколько лет до этой публикации пришёл к той же идее, которую он обычно и применял и про которую сообщил нескольким астрономам. Н. И.

14. Название теорема Лапласа – Чебышёва весьма неудачно. Впрочем, автор тут же сослался на разъясняющие страницы своей книги. О. Ш.

15. Laplace P. S. (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. *Oeuvr. Compl.*, t. 8. Paris, 1891, pp. 26 – 65. Особенно с. 44 – 46. Н. И. Указанная форма была не только априорной, но по существу и необоснованной. О. Ш.

16. Laplace P. S. (1781), Sur les probabilités. *Oeuvr. Compl.*, t. 9. Paris, 1893, pp. 383 – 485. Н. И.

17. Fréchet M. (1928), Sur l'hypothèse de l'additivité du erreurs partielles. *Bull. sci. math.*, t. 52, pp. 203 – 216. Особенно с. 215 – 216.

Он же (1935), Généralites sur les probabilités. E. Borel, редактор, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*. См. Fasc. 3, livre 1. Второе издание, Paris, 1950. Н. И.

18. Не вводя в перевод слов *в результаты*, я не могу кратко передать смысл дательного падежа латинского текста *так, чтобы они были наименее искажены погрешностями*. Н. И. Это решение Н. И. осталось неизвестным. О. Ш.

19. Об отдельных частях мемуара Гаусс заранее сообщил Гёттингенскому королевскому научному обществу. Н. И. Все эти сообщения включены в сборник переводов Гаусс (1957), см. прим. 31. О. Ш.

19.[Автор ввёл прим. 19, но не указал его места в тексте. Впрочем, его ссылки на некоторые страницы своей книги вполне соответствовали этому примечанию.] Сравнивая наблюдения с *игрой, в которой можно только опасаться проигрыша*, Гаусс применяет термин *jactura*. В мемуаре по теории ошибок, Ньюком (см. прим. 28) переводит Гаусса: *Evil and worth of erroneous results* (вред и ценность ошибочных результатов). Н. И.

20. Мы не можем согласиться с авторской оценкой результатов Маркова по теории ошибок, см. Шейнин (2019, § 15.2-1). Сам Идельсон (с. 101) назвал главу о СНКв в трактате Маркова *трудно написанной*.

21. См. **Марков А. А.** (1924), *Исчисление вероятностей*. М., с. 386:

Т*е же самые приближённые величины могут быть определены одной довольно простой системой уравнений.*

Здесь речь идёт в сущности о переходе от методы Гаусса к нормальным уравнениям, т. е. к способу Лежандра. См. также с. 459 о решении задачи, которую мы излагаем в гл. 9. Н. И.

22. Все мемуары Коши, относящиеся к его методу и к теории вероятностей, собраны в полном собрании его сочинений

Cauchy A. L. (1900), *Oeuvr. Compl*., sér. 1, t. 12. Paris, с. 36, 63, 87, 94, 114, 125.

Особенно важно применение *характеристических функций*, с 97 и 105. О них см. § 31. Там же ответная критика мемуаров Бьенеме, по существу не вполне убедительная. Н. И.

23. Leverrier U. (1855), Recherches astronomiques. *Ann. Obs. Paris*, t. 1, pp. 132 – 137. См. также

Radau R. (1891), Recherches sur les formules d'interpolation. *Bull. astr*., t. 8. Н. И.

24. Вот основные мемуары Чебышёва. Мы указываем соответствующие том и страницы из его *Полного собрания сочинений* (1944 – 1951):

1859, Об интерполировании по способу наименьших квадратов, т. 2,

с. 314 – 334

1864, Об интерполировании, т. 2, с. 357 – 274.

1876, Об интерполировании величин равноотстоящих, т. 3, с. 366 – 387.

Об ортогональных полиномах, с помощью которых осуществляется разложение, речь идёт начиная с мемуара

1855, О непрерывных дробях, т. 2, с. 103 – 126.

и кончая мемуаром

1891, О суммах, составленных из простейших одночленов, особенно § 5, т. 3, с. 256 – 306.

Мы не рассматриваем способ Чебышёва. Я лишь ссылаюсь на некоторые его изложения и применения (§ 21). Н. И.

25. Квадратические приближения составляют важный и обширный отдел современного анализа. См., например,

Гончаров В. Л. (1934), *Теория интерполирования и приближения функций*, гл. 3. Н. И.

26. См. Марков, прим. 20, с. 341 – 344. Кроме гл. 7 этого трактата чрезвычайно важна его статья

1899, Закон больших чисел и способ наименьших квадратов. В книге автора *Избр. труды.* Без места, 1951, с. 231 – 251. Н. И.

27. См. Poincaré, прим. 6, § 91. Н. И.

28. Jeffreys H. (1938), The law of errors and the combination of observations. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 237, pp. 231 – 271. Н. И.

29. Newcomb S. (1886), Generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best results. *Amer. J. Math.*, vol. 8, pp. 343 – 366. Н. И.

30. Poisson S. D. (1824 – 1829), Sur la probabilité des résultats moyens des observations. *Conn. des temps* за 1827, pp. 273 – 302; за 1832, pp. 3 – 22 второй пагинации. Н. И.

31. Charlier C. V. L. (1905), Über das Fehlergesetz. *Arkiv for mat. astr. phys.*, Bd. 2, No. 8.

Некоторые из формул Шарлье совпадают вплоть до обозначений с формулами Пуассона. Впрочем, ряды, получившие название рядов Грама – Шарлье, совершенно определённо имеются уже у Чебышёва.

1887, О двух теоремах относительно вероятностей, *Полн. собр. соч.*, т. 3, с. 229 – 239.

Все мемуары Гаусса (на латинском языке с немецкими авто-аннотациями) помещены в томе 4 его *Werke*, *Теория движения* – в т. 7, дополнения, заметки и [очень немногие] письма – в тт. 8 и 10. Имеются переводы […] на русский язык, с немецкого издания 1887 г., 1889 г., который является библиографической редкостью. Н. И.

Есть русские переводы Гаусс К. Ф. (1957), *Избр. геод. соч.*, т. 1. М. О. Ш.

32. Andoyer H. (1923), *Cours de mécanique celeste*, t. 1. Paris.

33. Колмогоров А. Н. (1946), К обоснованию метода наименьших квадратов. *Успехи математич. наук*, т. 1, № 1 (11), с. 57 – 71.

Особое примечание о гл. 11 автора. На эту главу он сослался, и мы сочли желательным высказаться о ней.

Книга автора вышла в Геодезиздате, и мы прежде всего заметим, что он почти никогда не употребляет вошедшего в геодезический обиход, хоть и намного позднее Гаусса, выражения *средняя квадратическая ошибка*; почти неизменно она называется *средней*. Автор не знал термина *центральная предельная теорема* (ЦПТ), и вряд ли был знаком с устойчивыми законами, недаром его описание действия *Доски Гальтона* было поверхностным.

Описание заслуг Бесселя было неудовлетворительным. Мы сами сообщили о его ошибках, см. **S, G,** 72, но добавим: легко поверить, что он по сути

умолчал о нарушении нормальности в длинных рядах наблюдений, чтобы только оправдать своё доказательство ЦПТ (разумеется, ещё нестрогое). Бессель был и крупным учёным, и отъявленным халтурщиком.

Введение вероятной ошибки автор приписал Гауссу, но в том же 1816 г. её ввёл Бессель в статье, сданной в печать за несколько лет до этого. Мы практически уверены, что статью Гаусса напечатали почти сразу после её получения. Идельсон, правда, описал доказательство формулы Петерса, но не указал, что доказательство уточнил Гельмерт (Шейнин 2019, § 10Б).

VII

О. Б. Шейнин

К истории предельных теорем Муавра – Лапласа

История и методология естественных наук, вып. 9, 1970, с. 199 – 211

Мы рассматриваем соотношение результатов Якоба Бернулли и Муавра и появление нормального закона у Муавра. Эти темы рассматривались ранее, но наше изложение полнее, а выводы из него значительно отличаются от некоторых прежних выводов[1].

Искусство предположений (ИП) Я. Б. оказало сильное влияние на развитие теории вероятностей и всегда считалось классическим, о нём с большим уважением отозвался Лаплас. Не пересказывая содержание ИП, мы остановимся на нём главным образом в связи с крайне отрицательным отзывом Карла Пирсона [1] о его 4-й части.

Суть закона больших чисел (термин Пуассона) в этой части ИП состоит в следующем. Рассматривается биномиальное разложение $(r + s)^{nt}$, где $t = r + s$, n – большое натуральное число, r и s положительны. Доказывается, что при достаточно большом nt сумма $2n$ средних членов разложения (даже исключая средний член) окажется более, чем в заранее заданное число раз c больше остальных членов разложения. Затем этот алгебраический факт применяется для вероятностного рассуждения: пусть $r/(r + s)$ – постоянная вероятность успеха в единичном испытании, nt – количество испытаний. Тогда при достаточно большом nt вероятность числу успехов находиться в пределах $n(r \pm 1)$ может быть доведена до величины, более, чем в заранее заданное число раз c превышающей вероятность противоположного события. Иными словами, Я. Б. доказал, что

$$\lim P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad n \to \infty.$$

Здесь μ – количество наступлений некоторого события в n независимых испытаниях, p – постоянная вероятность наступления этого события в единичном испытании. Мы не останавливаемся на этом подробнее, поскольку ход рассуждений и соответствующие преобразования воспроизвели Марков [2] и Пирсон [1].

Бернулли далее обращает эту задачу и утверждает (без особого доказательства), что если по результатам испытаний получена некоторая апостериорная вероятность успеха в единичном

испытании $p = r/(r + s)$, то вероятность истинному значению p находиться в пределах $p \pm 1/(r + s)$ также может быть сделана в c раз больше вероятности противоположного события. Бернулли приводит и несколько менее известную численную оценку: при $r = 30$ и $s = 20$, т. е. при $t = (r + s) = 50$, $1/(r+ s) = 0{,}02$, оказывается, что $c = 1000$ при $nt = 25\,500$, $c = 10\,000$ при $nt = 31\,258$ и т. д., или иначе, возрастание nt на 5758 приводит к 10-кратному возрастанию c.

Бернулли не оценивал изменение c при изменении пределов, в которых может изменяться число успехов. Нигде, видимо, не было замечено, что оценка Бернулли может быть записана в виде

$$nt = 25\,500 + 5758\lg(c/1000) = 8226 + 5758\lg c, \qquad (1)$$

$$c = 10^{(nt - 8226)/5758}. \qquad (1')$$

Последнее равенство нетрудно переписать для основания e, и, что существеннее, поскольку трудно предположить, что Бернулли не представлял себе, что его численная оценка соответствует логарифмической и показательной функции типа (1) и (1’), следует сказать, что фактически у Бернулли впервые появилась экспоненциальная функция – прообраз функции распределения

$$\varphi(x) = \frac{m}{2} e^{-m|x|}, \ m > 0$$

в первом мемуаре Лапласа по теории вероятностей [3].

Выражения (1) и (1’) не являются законами распределения, они лишь устанавливают детерминированное соотношение между nt и c. Но из этих равенств следует, что Я. Б. сформулировал свой закон в виде, который является прообразом локальной предельной теоремы.

Четвёртая часть ИП, в которой содержится вывод закона больших чисел, была в юбилейный 1913-й год переведена на русский язык под редакцией Маркова [4]. В том же году появилось третье издание *Исчисления вероятностей* Маркова с портретом Я. Б., *юбилейное*, как его назвал автор. Наконец, в том же году работе Я. Б. в теории вероятностей было посвящено специальное заседание Петербургской АН, на котором с докладами выступили Марков, Васильев[2] и Чупров.

Но лишь в посмертном издании *Исчисления вероятностей* [2] Марков исправил численную оценку Я. Б., получив 16 655 вместо 25 500. Основное исправление (до 17 324) Марков получил, уточнив промежуточные неравенства Бернулли. Он, видимо. специально не применил формулы Стирлинга, которую тот не

мог знать. [Точнее, он применил её в отдельном исследовании (там же, с. 55 и след.).] Вторичного исправления Марков добился, освободившись от условия делимости показателя степени nt на $r + s = t$.

Пирсон [1] применил формулу Стирлинга и добился практически точного совпадения свой оценки с оценкой, которая использует нормальное распределение как предельное для биномиального [1, с. 202]:

Для подсчёта суммы членов биномиального ряда Бернулли принял весьма грубый метод неравенств. […] *Он получил в сильнейшей степени преувеличенные значения для необходимого числа опытов* […]. *Его решение* […] *практически негодно, будь оно принято, оно разорило бы либо страховую кампанию, либо её клиентов. Всё, достигнутое Бернулли, заключается в показе того, что при увеличении числа наблюдений результаты, несомненно, окажутся в определённых пределах. Но он потерпел полную неудачу в определении* <u>*надлежащего*</u> *числа наблюдений для этих пределов. Определение этого числа было полностью открытием Муавра*.

И на с. 210:

Я полагаю, что мы должны считать в некоторой степени извращением исторических фактов название этого метода […] *по имени человека, который после 20 лет раздумий не получил ничего, кроме этих грубых оценок*, […] *преувеличенных на* 200 – 300%. *Бернулли понимал важность определённой проблемы, – равно и Птолемей, – но было бы абсурдно называть кеплерово или ньютоново решение* [проблемы] *движения планет именем Птолемея. Часть четвёртая ИП не имеет того значения, которое ей часто придавалось*.

Мнение Пирсона об ИП вряд ли верно. Нет никакого смысла делать упор на практическую негодность оценки Бернулли (и особенно на неучёт неизвестной ему формулы Стирлинга). Зато есть прямой смысл подчеркнуть само существование этой оценки и громадное значение закона больших чисел для всего хода развития теории вероятностей по крайней мере до Лапласа и Пуассона.

Отметим также высказывание Пирсона [5, с. 404] об отсутствии у Я. Б. меры точности, определяемой через $1/\sqrt{n}$. Но и это не следовало бы ставить Бернулли в вину. Воздавая должное Муавру, заслуги которого, как указывает Пирсон, во всей известной ему французской и немецкой литературе приписывались Я. Б., Пирсон неверно оценил результаты последнего.

После смерти Бернулли, но ещё до публикации ИП, Николай Бернулли в письме Монмору 23 января 1713 г. [6] примерно тем

же путём, что и Я. Б., вывел приближённую формулу для оценки отношения средней части биномиального ряда к его остальным частям и применил эту формулу для вероятностных выводов о рождении младенцев обоих полов (m – мальчиков, f – девочек) по данным Арбутнота[3]. Его вывод является почти очевидным следствием из самого хода доказательства закона больших чисел в форме Бернулли и сводится к тому, что вероятность числу рождений мальчиков находиться в пределах
$7200 \mp l$,

$$7200 = [14000 / (18 + 17)] \cdot 18,\ m : f = 18 : 17$$

(n = 14 000 – общее число ежегодных рождений), возрастает с ростом l.

Подсчитав отношение членов бинома $(m + f)^n$ с номерами $fr + 1$ и $fr – l + 1$, где $r = n/(m + f)$, Николай Бернулли получил

$$\alpha = \frac{u_{fr+1}}{u_{fr-l+1}} = \frac{mr+1}{fr-l+1}\frac{mr+l-1}{fr-l+2}\ldots\frac{mr+1}{fr}(f/m)^l$$

и принял, что последовательные дроби в этом выражении находятся в геометрической прогрессии друг к другу. При постоянных значениях величин, входящих в эти дроби, они находятся в постоянных отношениях друг к другу лишь с точностью до членов $O(1/p^2)$, $p = m/(m + f)$. Если принять $l = \sqrt{n}/2 \approx 60$ (Муавр особо выделял это значение, см. ниже), то знаменатель геометрической прогрессии окажется равным $q = f/(m + f) \approx 1 + 1/3500$, а погрешность суммы прогрессии равной

$$(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + lq^{l-1})O(1/p^2).$$

При $l \to \infty$ числовой ряд расходится, а при конечном l и заданном p погрешность возрастает пропорционально l^2. Таким образом,

$$\ln\alpha = \frac{l}{2}[\ln\frac{mr+l}{fr-l+1} + \ln\frac{mr+1}{mr} + \ln\frac{fr}{mr}],$$

$$\alpha = [\frac{(mr+l)(mr+1)f}{(fr-l+1)mr \cdot m}]^{l/2}.$$

Далее Н. Б. использует полученное отношение α как *масштаб*: он замечает, что отношение члена fr к члену $fr – l$ больше α, члена

$fr - 1$ к члену $fr - l - 1$ ещё больше и т. д. Разделив первую часть биномиального ряда на *классы* по l членов каждый (первый класс от члена с номером fr справа до члена с номером $fr - l$ слева, второй класс, от члена с номером $fr - l - 1$ справа до члена с номером $fr - 2l - 1$ слева и т. д.), Бернулли далее замечает, что отношение суммы членов второго класса к сумме членов первого класса меньше α, суммы членов третьего класса к сумме членов первого класса меньше α^2 и т. д., а сумма членов всех классов кроме первого – меньше $\sigma/(\alpha - 1)$, где σ – сумма членов первого класса и принято, что $l \to 0$. Таким образом, оказывается, что при малых l отношение суммы членов первого класса к сумме всех остальных членов ряда от u_1 до u_{fr-l-1} меньше, чем $\alpha - 1$.

Аналогично, рассматривая отношение

$$\beta = \frac{u_{fr+1}}{u_{fr+l+1}} = [\frac{(fr+l)(fr+1)m}{(mr-l+1)\,fr \cdot f}]^{l/2},$$

Н. Б. получает окончательный результат: сумма ряда от u_{fr-l+1} до u_{fr+l+1} включительно, даже исключая максимальный член u_{fr+1}, больше суммы остальных частей ряда не менее, чем в $(t - 1)$ раз, где $t = \min(\alpha, \beta)$. Вероятностный смысл этого утверждения таков (пример Н. Б.):

$$\frac{P(|\mu - rm| \le l)}{P(|\mu - rm| > l)} = t - 1,\ P(|\mu - rm| \le l) = \frac{t-1}{t}.$$

Если, как и раньше, l имеет порядок $\sqrt{n}$, то

$$t \approx [\frac{(mr+l)}{(fr-l)}\frac{f}{m}]^{l/2} \approx [1 + \frac{l(m+f)}{mfr}]^{l/2} \approx \exp(-\frac{l^2(m+f)^2}{2mfn},$$

$$P(|\mu - rm| \le l) \approx 1 - \exp(-\frac{l^2}{2pqn}). \qquad (2)$$

Таким образом, в этом рассуждении впервые участвовала, хотя и в косвенной форме, показательная функция отрицательного квадрата, а само рассуждение, как и у Якоба Бернулли, является прообразом локальной предельной теоремы. Отметим, что $pqn = D\mu$, где D – символ дисперсии, и что формула (2), исправленная числовым множителем $\sqrt{2/\pi} \approx 0{,}80$, могла бы служить для подсчётов в соответствии с интегральной предельной теоремой.

Переходим к Муавру (1667 – 1754), и прежде всего приведём общие сведения о нём [13; 14; 9; 15; 16]. Два первых источника являются основными. Французу по национальности, еиу

пришлось покинуть Францию ввиду отмены Нантского эдикта (1685). Примерно в 1688 г. он поселился в Лондоне. Математическое образование Муавра (он учился, в частности, у Ж. Озанама) оказалось явно недостаточным, но он сумел восполнить его самостоятельно, а позднее был избран в Королевское общество. Он пользовался благожелательным отношением и уважением Ньютона, латинское издание *Оптики* которого вышло в свет при его большом редакционном участии. В поздние годы своей жизни Ньютон имел обыкновение отсылать к Муавру всех, обращавшихся к нему, к Ньютону, с вопросами математического характера.

В числе прочих учёных (в частности, вместе с Арбутнотом) Муавр был назначен Королевским обществом в специальную комиссию для установления истины в споре Ньютона и Лейбница о приоритете в открытии бесконечно малых. Тодхантер [9, § 233] написал о нём:

В длинном списке лиц, облагороженных гением, достойными качествами и злополучиями, трудно назвать кого-либо, кто принёс бы больше чести своей новой родине, чем Муавр.

Если ограничиться математиками, то это очень похоже на правду. Но это ещё не вся правда. Новая родина не обеспечила Муавру мало-мальски достойного образа жизни, и он так и не смог занять какого-либо официального положения и зарабатывал себе на жизнь частными уроками и платными консультациями. В 1735 г. Муавр был избран членом Берлинской академии наук, а незадолго до смерти (1754), иностранным сочленом Парижской академии. Несмотря на своё желание, он так и не успел ничего представить в Париж для публикации. После смерти Муавра его место в Парижской академии было передано *совместно* президенту Королевского общества Макклсфилду и Эйлеру.

По свидетельству того же Тодхантера [9, § 336], теория вероятностей была обязана Муавру более, чем кому бы то ни было за исключением Лапласа [если же добавить приложения этой теории, то упомянем Даниила Бернулли]. Но, перечисляя заслуги Муавра, Тодхантер указывает лишь на его исследования продолжительности жизни, теорию возвратных последовательностей и на *расширение значения теоремы Бернулли при помощи теоремы Стирлинга*. Если же учесть, что при этом *расширении* Муавр пришёл к нормальному распределению, то его заслуги следует считать ещё бОльшими (но по-прежнему уступающими заслугам Лапласа).

Основные сочинения Муавра[4], которые нас интересуют, таковы: **1.** *Учение о случае* [18] (издание 1718, оказавшееся недоступным, 1738 и посмертное 1756), развёрнутое из объёмистой статьи 1712 г. *О мере случая*. **2.** *Аналитические*

этюды [17] (1730), с двумя, очевидно позднее, приплетёнными Дополнениями. По свидетельству Пирсона [5; 19], первое Дополнение имеется не у всех экземплярах *Этюдов*, а второе с датой 1733 г. – лишь у нескольких экземпляров. Мы выделяем его отдельно: **3.** *Метод аппроксимирования суммы членов разложенного в ряд бинома* $(a + b)^n$, *из которого* [метода] *выведены некоторые практические правила для оценки согласованности, которая должна быть приписана экспериментам*.

Фотокопию латинского оригинала *Аппроксимирования* опубликовал Арчибальд [20], который полагает [20; 21], что эта статья была опубликована лишь в 1738 г., только в переводе на английский, во втором издании *Учения о случае*. Сам Муавр (в следствии к задаче 73 издания 1756 г.) указал, что

Перевёл (на английский язык) *свою статью, которая была напечатана 13 ноября 1733 г.* [на латинском языке] *и сообщена некоторым друзьям, но до сих пор не была опубликована*.

Следует поэтому считать, что латинский оригинал *Аппроксимирования* был приплетён к нераспроданным экземплярам *Этюдов* (по Пирсону – к нераспроданным в 1733 г.) и вскоре (1738) был опубликован в переводе в *Учении о случае*.

Именно в *Аппроксимировании* содержится у Муавра нормальное распределение. На это обратил внимание Пирсон [5], который, однако, не знал, что это уже заметил [Де Морган в 1864 г., затем] Эггенбергер [23] и, со ссылкой на него, Чубер [24]. Хаусснер [25] также упомянул Эггенбергера, но никаких сведений о его работе не привёл и назвал её неясной и обзорной. Однако, Эггенбергер подробно изложил результаты Бернулли (до изданного Хаусснером немецкого издания ИП) и Муавра и чётко изложил свои выводы. Функцию $\exp(-2x^2/n)$ он [23, с. 158] назвал по имени Муавра, ему же [но при изучении страхования жизни!] приписал первое применение в теории вероятностей анализа бесконечно малых и кривой распределения [которая фактически появилась в письме Гюйгенса 1669 г., см. ниже]. Он также указал, что Муавр

Дал в принципе лапласов анализ теоремы Бернулли. Он нашёл не только приближённое значение для биномиальных коэффициентов и для $\Gamma(x)$ [точнее, для $n!$], *но и вывел интеграл Лапласа*.

Мы начнём с религиозных взглядов Муавра. Подробнее всего они проявились в последнем издании *Учения о случае*, а именно в *Аппроксимировании*. Он утверждает, что *случай* и *вероятности* вполне могут быть объектом исследования, например, при игре в кости, но что *в атеистических писаниях и рассуждениях* случай следует считать пустым звуком, поскольку (по контексту) в

отличие от математического употребления, в них нет чёткой постановки вопроса, нет модели.

Но если Арбутнот решил, что преобладание мальчиков среди новорождённых обусловлено божественным провидением, то ведь атеисты припишут тот же вывод действием природы.

Аналогичное, и притом весьма энергичное высказывание о случае имеется у другого члена Королевского общества, священника Дерхама (1657 – 1735) [26, с. 313], издателя рукописей Гука:

Будем ли мы столь одурачены дьяволом и ослеплены нашими вожделениями, чтобы приписывать один из наилучше задуманных [богом] *предметов мастерства* [т. е. человека] *слепому случаю либо неуправляемой материи и движению, либо любой подобной отупевшей от пьянства, гнусной атеистической дряни*?

Это высказывание было, наверное, известно Муавру. Сохранилось и письмо Дерхама Ньютону (его аннотацию привёл биограф Ньютона, Брюстер [10, т. 2, с. 520]), и в нём Дерхам просил Ньютона выполнить своё обещание и прислать замечания об одном из ранних изданий *Физико-теологии*.

Ещё в 1738 г., в *Аппроксимировании*, Следствие 10, Муавр вполне определённо писал:

Хотя случай вызывает неправильности, всё же соотношение вероятностей окажется неограниченно большим в пользу того, что с течением времени эти неправильности не окажут никакого влияния на восстановление того Порядка, который естественно вызывается Предначертанием.

Пирсон [19, с. 552] по этому поводу замечает:

Причины, которые привели Муавра к Аппроксимированию или Бейеса к его теореме, были более теологическими и социологическими, чем чисто математическими, и пока не будет признано, что после-ньютоновские английские математики находились под бОльшим влиянием теологии Ньютона, чем под влиянием его математики, история науки XVIII в., и особенно история науки учёных-членов Королевского общества, останется непонятой.

Мы уже отмечали, что Муавр пользовался уважением Ньютона. И вот посвящение первого издания *Учения о случае* Ньютону, перепечатанное в 1756 г. (с. 329):

Сэру Исааку Ньютону, Президенту Королевского общества

Сэр, поскольку наибольшую пользу по этой теме я получил от Ваших несравненных работ, и особенно от Вашего метода рядов, я полагаю своим долгом публично признать, что улучшения, которые я сделал в рассматриваемом в этой книге предмете, выведены главным образом исходя из Ваших трудов.

Огромная польза, которая в этом смысле выпала на мою долю, требует моей доли в общей дани благодарности, положенной Вам от учёного мира. Но одно преимущество, моё собственное, это часто оказываемая мне честь допущенным к Вашим частным беседам, в ходе которых сомнения, имевшиеся у меня относительно любой темы, относящейся к математике, разрешались Вами с наибольшими возможными человечностью и снисходительностью. Эти знаки Вашей благосклонности тем более ценны для меня, так как я не имел для неё никакого другого основания, кроме ревностного желания понять Ваши величественные и универсально полезные размышления.

Я должен буду полагать себя весьма счастливым, если, дав читателям метод вычисления влияний случаев, поскольку они являются результатами игры, и тем самым установив определённые правила для оценки того, в какой степени некоторые виды событий могут быть вызваны предначертанием, а не случаем, я смог бы этим небольшим очерком побудить в других желание продолжать эти исследования и изучать, исходя из Вашей философии способ сбора при помощи обоснованных вычислений свидетельств утончённой мудрости и предначертания, которые выявляются в явлениях природы по всей вселенной.

Остаюсь, с наибольшим уважением, Сэр, Ваш смиреннейший и покорнейший слуга А. де Муавр

Это посвящение действительно подтверждает вывод Пирсона, по крайней мере относительно Муавра. Но можно указать среди членов Королевского общества и исключение. *Лудильщик Симпсон*, как его презрительно назвала Дейвид [27, с. 36], будто бы не давший ничего, кроме примитивного дискретного треугольного распределения (Дейвид[5]), как кажется, ни в одной своей книге не повторил вслед за Муавром его идеалистических взглядов.

У Лагранжа, и независимо у Лапласа возникла мысль о переводе *Учения о случае* на французский язык, см. письмо Лагранжа Лапласу 30 дек. 1776 г. [28, с. 66]. Это, разумеется, лишний раз подчёркивает значение книги, но здесь возникает вопрос: какие комментарии к философским идеям Муавра дали бы Лагранж или Лаплас? Мы закончим эту тему, приведя ответ Муавра на замечание об отсутствии религии у математиков [13, с. 184]:

Я докажу, что я христианин тем, что прощу Вам это оскорбление.

Книга пятая *Этюдов* называется *Биномом* ($a + b$), *возведённый в большую степень*. Здесь Муавр приводит длинную цитату из Якоба Бернулли, описывает письмо Николая Бернулли Монмору

(см. выше) и решает две задачи об ожидании выигрыша при определённых условиях игры и несколько алгебраических задач, которые впоследствии понадобились ему в *Аппроксимировании*. По поводу письма Н. Б. Муавр [17, с. 98] замечает, что тот

Не исследовал вероятность вероятности числу появлений и непоявлений события находиться в определённых пределах.

Действительно, Н. Б. ставил себе иную задачу.

Упомянутые задачи об играх вошли в *Учение о случае* (№№ 86 и 87 в 1738 г.). Вот они (основной текст – задача № 86, предложенная, как заметил Муавр в *Этюдах*, Алексом Камингом в 1721 г., в скобках – задача № 87):

А *и* В, *играя друг с другом и имея равное число шансов выиграть партию* (шансы относятся как a:b), *обещают зрителю S, что после происшествия чётного числа партий n победитель отдаст ему столько ставок, сколько он выиграет сверх половины* (А – сверх $[a/(a + b)]n$, В – сверх $[b/(a + b)]n$) *числа сыгранных партий. Требуется узнать ожидание зрителя S.*

Мы описали эти задачи лишь потому, что Муавр считал их переходными от предыдущего текста к *Аппроксимированию*. В оглавлении к изданию 1738 г. эти задачи характеризуются как

Клонящиеся к установлению степени согласия, которая должна быть придана экспериментам,

а само *Аппроксимирование* скромно названо *тем же предметом, продолженным далее*.

После решения каждой из этих задач Муавр чётко формулирует следствия о том, что отношение вероятностей появления и непоявления события в единичном испытании будет весьма близким к соответствующему отношению при большом числе испытаний, и притом тем более близким, чем бОльшим было число испытаний. Но, замечает Муавр, при большом числе испытаний всё-таки могут происходить уклонения от ожидаемого результата. Исследование соответствующего явления с численными оценками вероятностей уклонений результатов наблюдения от ожидаемых результатов – *труднейшая проблема* […] *из области случаев*, к которой Муавр и переходит уже в *Аппроксимировании*.

Для общего изложения задачи №№ 86 и 87, пожалуй, почти не нужны, и Муавр использовал их лишь в качестве примеров, чтобы затем, в следствиях, спросить: что же делать, если результаты наблюдений не подтверждают исходных данных (если выигрыш S существенно отличается от ожидаемого).

Обратим внимание на чёткую формулировку обратной задачи (определение вероятности по наблюдениям). Эта обратная задача имеется и у Якоба Бернулли, который никак не отмечает перехода от прямой задачи к обратной. Да и Муавр, рассматривая

свою *труднейшую задачу*, фактически вторично переходит к прямой задаче, см. ниже.

Как и часть 4-я ИП, *Аппроксимирование* состоит из алгебраической и вероятностной частей. В первой из них, ссылаясь на известные ему *дюжину лет или более* результаты (т. е. на свои *Этюды*), Муавр выписывает отношение среднего члена биома $(1 + 1)^n$ к сумме всех членов разложения и логарифм отношения среднего члена этого бинома к члену, удалённому от него на l, получает непосредственно интересующее его отношение любого члена бинома к сумме всех членов разложения, и, наконец, при помощи интегрирования определяет отношение суммы членов между средним и удалённым от него на произвольное расстояние l к сумме всех членов разложения бинома[6].

1. Отношение среднего члена бинома к 2^n равно

$$\frac{2A(n-1)^n}{n^n\sqrt{n-1}} = \frac{2A(1-1/n)^n}{\sqrt{n-1}}, \qquad (3)$$

$$\ln A = \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} + ..., \quad \frac{1}{12} = B_1\frac{1}{1\cdot 2}, \quad -\frac{1}{360} = B_2\frac{1}{3\cdot 4}, ...$$

B_i – числа Бернулли. Подставляя

$$\ln B = 1 - \ln A,$$

Муавр переписывает отношение (3) в виде

$$\frac{2}{B\sqrt{n-1}} \approx \frac{2}{B\sqrt{n}}$$

и, ссылаясь на Стирлинга, указывает, что $B = \sqrt{2\pi}$.

Отношение (3) Муавр подсчитал в книге 5-й *Этюдов*. Там он выписывает дробь

$$C_{2m}^m = \frac{(m+1)(m+2)...2m}{m(m-1)(m-2)...1},$$

раскладывает в ряды логарифмы отношений $(m + 1)/(m – 1)$, $(m + 2)/(m – 2)$, … и складывает полученные ряды почленно (все первые члены, все вторые члены, …). Суммирование рядов Муавр выполняет, используя числа Бернулли, и, как кажется, не испытывает при этом ни малейших трудностей, а постоянную A

(= $e/\sqrt{2\pi}$ = 1,08444) он вычислил в первом дополнении к *Этюдам*. В этом дополнении Муавр независимо от Стирлинга и одновременно с ним вывел приближённую формулу для $n!$. Лишь значение постоянной, как уже было сказано, Муавр узнал от последнего. Ряд комментаторов [2; 5] справедливо заметили, что эту формулу следует называть формулой Стирлинга – Муавра. Но добавим, что в первом дополнении к *Этюдам* Муавр опубликовал вычисленную им с 14-ю знаками таблицу логарифмов $n!$ от $n = 10$ до $n = 900$ с шагом 10, и это придаёт Муавру особый вес по сравнению со Стирлингом. Муавр перепечатал эту таблицу в качестве одного из приложений к последнему изданию *Учения о случае*. Сравнение с современной таблицей [29] показывает, что таблица Муавра содержала 11 – 12 верных знаков с единственной опечаткой в пятом знаке мантиссы lg380!.

2. Логарифм отношения среднего члена бинома к члену, удалённому от него на l, равен

$$(m + l - 1/2)\ln(m + l - 1) + (m - l + 1/2)\ln(m - l + 1) - 2m\ln m + \ln[(m + l)/m], \qquad (4)$$

где $m = n/2$ и при $m \to \infty$ эквивалентен $-2l^2/n$. Само же отношение поэтому эквивалентно

$$1 - \frac{2l^2}{n} + \frac{4l^4}{2n^2} - \ldots \qquad (5)$$

Фактически, что подтверждается дальнейшими выкладками Муавра, он имел в виду обратное отношение *удалённого* члена к среднему. Выражение (4), но не его эквивалентную форму, Муавр также подсчитал в книге 5-й *Этюдов*.

3. Отношение суммы членов между средним и уделённым от него на произвольное расстояние l к 2^n равно

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\left[l - \frac{2l^3}{1\cdot 3n} + \frac{4l^5}{2\cdot 5n^2} - \ldots\right], \qquad (6)$$

где выражение в скобках получено интегрированием ряда (5).

В вероятностной части *Аппроксимирования* Муавр пользуется либо рядом (6), вычисляя его сумму при небольших l (до $l = \sqrt{n}/2$), либо в противном случае, интегрируя функцию $\exp(-2l^2/n)$ по приближённой формуле численного интегрирования Ньютона (по *формуле трёх восьмых*). Пирсон справедливо заметил, что Муавр пользуется здесь интегралом

вероятности так же, как и по сей день. При этом Муавр (следствие 6) полностью сознавал значение $\sqrt{n}$ как меры точности наблюдений, отметил, что половинная вероятность достигается при $l \approx \sqrt{2n}/4$ (следствие 5) и что его формула, т. е. нормальное распределение, обеспечивает хорошее приближение уже при n = 900 и даже n = 100 (там же).

И всё же первоначальное появление $\sqrt{n}$ у Муавра объясняется алгебраическим фактом: как было отмечено выше, значение $l = \sqrt{n}/2$ явилось граничным для двух способов интегрирования функции $\exp(-2l^2/n)$. Значение $l \approx \sqrt{2n}/4$ никак не названо и не предложено в качестве меры. Много позднее половинной вероятности была поставлена в соответствие так называемая вероятная ошибка.

Достаточно точное приближение при n = 900 и 100 Муавр выявил, как он сообщает, опытным путём. Фактических данных об этих опытах он не приводит, но сам факт проверки примечателен: Уокер [15, с. 320] утверждает, что

Ни в каких сочинениях Муавра мы не находим свидетельств интереса к экспериментированию, измерениям или наблюдениям природы.

Пусть опыты Муавра не относились к естествознанию, но они, как составленная им таблица для $\lg n!$, как и его работы по подсчёту пожизненных рент, свидетельствуют о том, что он доводил свои результаты до вида, пригодного для практики. Уокер (там же) заявила, что *даже в области* Учения о случае работы Муавра чисто дедуктивны и не сопровождаются экспериментальной проверкой, но это недоразумение. Более того: всё *Аппроксимирование* в целом было написано именно для *экспериментальной проверки* доопытных данных и в этом смысле является индуктивным, см. описанные выше задачи №№ 86 и 87 из *Учения о случае*.

Значение индукции в ранней теории вероятностей, видимо, вообще недооценивается. Один пример: в 1669 г., в одном из своих писем Гюйгенс [30, с. 530] привёл график непрерывного эмпирического закона распределения смертности по возрастным группам.

Можно полагать, что Муавр представлял себе значение *Аппроксимирования* как уточнение оценки Бернулли, притом позволяющее производить подсчёты при любых l, а не, как у его предшественника, лишь при одном фиксированном l. В конце *Аппроксимирования* Муавр заметил, что его изложение элементарно распространяется на общий случай $(a + b)^n$, а само название этого труда упоминает этот же бином, и потому можно понимать его результат как доказательство локальной и

интегральной теорем о сходимости биномиального распределения к нормальному, т. е. как простейший вариант центральной предельной теоремы. Понятия о равномерной сходимости у Муавра (как и у Лапласа) не было.

Примечания

1. См. также нашу статью в *Biometrika*, vol. 55, No. 3, 1968, pp. 459 – 467.

2. Александр Васильевич Васильев, 1853 – 1929, казанский профессор. Активно пропагандировал идеи Лобачевского и занимался историей математики. В 1885 г. опубликовал в Казани курс теории вероятностей, но в этой области известен прежде всего как корреспондент Маркова. В письме Васильеву Марков изложил свои соображения об обосновании метода наименьших квадратов.

3. Джон Арбутнот, 1667 – 1735, врач и математик, член Королевского общества с 170 4 г. Он бы хорошо знаком с писателем Свифтом и поэтом Попом, написал несколько памфлетов, направленных против вигов. Имя героя одного памфлета (*История Джона Булля*) дожило до настоящего времени. Его труды включают две книги *Опыт рассуждения о пользе математического учения*, 1700, перепечатано в [7], и *Таблицы древних мер, весов и монет с переводом в современные меры* (1707, 1727). Ему же приписывается перевод сочинения Гюйгенса *О законах случая*. Наиболее интересной для нас является его заметка о количественном соотношении мужских и женских рождений (*Довод в пользу божественного провидения, взятый из постоянной закономерности, наблюдаемой в рождении обоих полов*), 1712 за 1710, перепечатан: Kendall M. G., Plackett R. L. (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London, pp. 30 – 34. В ней он впервые [8] применил проверку статистической гипотезы, но лишь с точки зрения *случайное или детерминированное*. Уверившись в детерминированном преобладании мужских рождений, приписал это божественному провидению.

4. Собрания сочинений Муавра (и ряда других английских математиков) не существует, а его *Аналитические этюды* были лишь недавно переведены на французский язык (Париж, 2009).

5. Для своего времени это распределение вовсе не было примитивным, и кроме того Симпсон ввёл и непрерывное треугольное распределение. Но он отвратительно отнёсся к Муавру, и Pearson K. (1977), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries* … London, с. 145 и 184, назвал его *самым бесчестным типом* и *наглым лжецом и по сути законченным подлецом*.

Вот высказывание Дейвид [27, с. 36] о Лапласе: он

Не был зачинателем как Ферма или Ньютон, он синтезировал и улучшал и не имел себе равных в расчистке и расширении путей, указанных интуицией других.

Она также бездоказательно отрицательно отозвалась о Лапласе как о человеке. Нам следует указать, что Лаплас перевёл теорию вероятностей из области чистой, в область прикладной математики.

6. Муавр начинает *Аппроксимирование* с указания на то, что подобной задачей занимались лишь Якоб и Николай Бернулли:

Хотя они проявили весьма существенное мастерство и пользуются хвалой, которая вызвана их трудолюбием, всё же потребовались некоторые другие исследования, ибо сделанное ими не столько аппроксимация, сколько определение очень широких границ, в пределах которых, как они доказали, содержится сумма членов.

Библиография

1. Pearson K. (1925), Bernoulli's theorem. *Biometrika*, vol. 17, No. 3 – 4, pp. 201 – 210.

2. Марков А. А. (1900), *Исчисление вероятностей*. М., 1924.

3. Laplace P. S. (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. *Oeuvr. Compl*., t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.

4. Бернулли Я. (1913), *Часть четвёртая Ars Conjectandi*. Перевод Я. В. Успенского, ред. А. А. Марков. СПБ.

5. Pearson K. (1924), Historical note on the origin of the normal curve of errors. *Biometrika*, vol. 16, No. 3 – 4, pp. 402 – 404.

6. Montmort P. R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris, 1713. Перепечатка: New York, 1980.

7. Aitken G. A. (1892), *Life and Works of John Arbuthnot*. Oxford.

8. Freudenthal H. (1961), 250 years of mathematical statistics. В книге *Quantitative Methods in Pharmacology*. Редактор H. De Jonge. Amsterdam, pp. XI – XX.

9. Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

10. Brewster D. (1855), *Memoirs of the Life of Isaac Newton*, vols. 1 – 2. Edinburgh.

11. Beattie L. M. (1935), *John Arbuthnot. Harvard studies in English*, vol. 16. Cambridge.

12. Stephen L. (1885), John Arbuthnot. *Dict. Nat. Biogr*., vol. 2.

13. (1759), Eloge de De Moivre. *Hist. Acad. Roy. Sci. Paris* за 1754; pp. 175 – 184.

14. Maty M. (1760), Mémoire sur la vie de De Moivre. Англ. перевод: Bellhouse D. R., Chr. Gewert, *Stat. sci*. vol. 22, No. 1, 2007, pp. 109 – 136.

15. Walker H. M. (1934), Abraham De Moivre. *Scripta math.*, vol. 2, No. 4, pp. 316 – 333.

16. Clarke A. M. (1894), Moivre. *Dict. Nat. Biogr*., vol. 38.

17. Moivre A. (1730), *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*. London, Французский перевод: Париж, 2009.

18. Moivre A. (1718, 1738, 1756), *Doctrine of Chances*. London. Перепечатка: Нью-Йорк, 1967.

19. Pearson K. (1926), Abraham De Moivre. *Nature*, vol. 117, No. 2946, pp. 551 – 552.

20. Archibald R. C. (1926), A rare pamphlet of Moivre and some of his discoveries. *Isis*, vol. 8, No. 4(28), pp. 671 – 684.

21. Archibald R. C. (1926), Abraham De Moivre. *Nature*, vol. 117, No. 2946, pp. 551 – 552.

22. Smith D. E. (1929), *Source Book in Mathematics*. New York – London.

23. Eggenberger J. (1894), Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gamma-Funktion und des Laplace'schen Integrals. *Mitt. naturforsch. Ges. Bern* за 1893, No. 1305 – 1334, pp. 110 – 182. Отдельное издание: Berlin, 1906.

24. Czuber E. (1899), Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie. *Jahrb. deutsch Math. Ver.*, Bd. 7, No. 2. Отдельная пагинация.

25. Bernoulli J. (1899), *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Ars Conjectandi*). Редактор R. Haussner. *Ostwalds Klassiker*, No. 107 – 108. Leipzig. Frankfurt/Main, 1999.

26. Derham W. (1768), *Physico-Theology*. London.

27. David F. N. (1965), Some notes on Laplace. В книге: редакторы J. Neyman, L. LeCam, *Bernoulli – 1713, Bayes 1763 – Laplace 1813*. *Anniversary volume. Proc. Intern. Res. Seminar stat. lab. Univ. Calif.* Berlin и др., pp. 30 – 44.

28. Lagrange J. L. (1892), *Oeuvres*, t. 14. Paris.

29. Peters J. (1922), *Zehnstellige Logarithmentafeln*, Bd. 1. Berlin.

30. Huygens C. (1895), Correspondence, 1669. *Oeuvr. Compl.*, t. 6. La Haye.

Несколько последующих замечаний. **1.** Закон больших чисел Якоба Бернулли это, прежде всего, теорема существования. Пирсон, стало быть, не придавал им значения. **2.** Он же обратил особое внимание на религиозное влияние Ньютона, и мы добавим, что в 1931 г., в Лондоне, на международном конгрессе по истории науки и техники, Б. Гессен доложил о социально-экономических корнях *Начал* Ньютона (опубликовано в 1933 и 1934 гг. в Москве) и застал участников конгресса врасплох, но вот о религии он и не подумал. Впоследствии Гессен погиб как враг народа … См. о нём в **S, G,** 97. **3.** О прямой и обратной задаче у Якоба Бернулли и Муавра; мы бы сказали, о прямом и обратном законе больших чисел. Обратный закон менее точен, и впервые это количественно установил Бейес (Шейнин 2019, § 6.2).

Шейнин О. Б. (2019), *Теория вероятностей. Исторический обзор*. Берлин. **S, G,** 11.

VIII

О. Б. Шейнин

Рефераты

Мы перепечатываем (в основном в переводе с английского) часть своих рефератов, почти исключительно из ставшего практически недоступным реферативного журнала *Zbl MATH* и из нескольких других источников. Мы указываем название всех из них, за исключением *Zbl MATH. Новые книги за рубежом* мы сокращённо обозначаем НКЗР. Рефераты указаны в алфавитном порядке авторов статей или книг. Наши обширные рефераты нескольких книг мы публикуем отдельно, ниже.

Bayley M., Hard times and statistics. *BSHM Bull.*, vol. 22, No. 2, 2007, pp. 92 – 103. Реферат 1126.01010

Тяжёлые времена (1854) – сатирическая новелла Диккенса, направленная *против тех, кто замечает лишь цифры и средние*, т. е. против *представителей самого порочного, громаднейшего зла нашего времени*. Это – цитата из *многократно* упоминаемого письма Диккенса 1854 г. Диккенс полагал, что цифры *затмевают более глубокие моральные проблемы* и *ненавидел воображаемую связь* статистики и социальных улучшений.

Числа подвергались атаке и на Континенте (о чём автор не сообщает) по той же причине и как скверно описывающие государства, но это отношение к статистике оказалось ошибочным. Автор не обосновал своего утверждения о том, что мощь статистики *оказалась неуместной, что показали промышленные волнения*.

На этом фоне автор обсуждает положение статистики в Англии в середине XIX в., но его знания явно недостаточны и выводы частично ошибочны. Что Лондонское статистическое общество почти обрушилось (неправдоподобно!), было вызвано его отказом от исследования собранных данных (отказ фактически нарушался). Статистика *по существу* развивалась не только на Континенте. Следовало назвать Эджуорта и Гальтона, а также Чадвика, Гая и Фарра, роль которых преуменьшена. В 1855 г. Сноу (вопреки Диккенсу!) статистически доказал, что источником холеры является неочищенная питьевая вода. Статистика существенно помогла преобразовать хирургию, причём анестезия, Листеровские методы и понимание госпитализма пришли из Англии.

Кетле почти не повлиял на английскую статистику? Его *Письма о вероятности* (1846) были переведены на английский в

1849 г., а в 1850 г. их описал Дж. Гершель, позднее же Кетле повлиял на Гальтона. Наконец, слово *статистика* появилось в английском языке в 1787 г. (*Oxford English Dictionary*), а не в 1791 г.

Bernoulli Jakob, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Ars Conjectandi*). Переводчик и редактор R. Haussner. Mit dem Anhange: *Brief an einen Freund über das Ballspiel* (*Jeu de paume*). *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften* 107/108, 1899. Frankfurt/Main, 1999. Реферат 0957.01032

Латинское сочинение *Искусство предположений* с французским добавлением *Письмо другу об игре в мяч* было опубликовано посмертно в 1713 г. Вместе с сопутствующими материалами, в том числе с теоретико-вероятностной частью *Дневника* автора и комментариями, оно было опубликовано в *Трудах* автора (*Werke*, Bd. 3. Basel, 1975).

Вторая часть книги была переведена на английский язык в 1795 г., первая часть – на французский в 1801 г., четвёртая часть – на русский в 1913 и 1986 гг., на английский в 1966 г. и на французский в 1987 г.

Вся книга вместе с *Письмом* была переведена на немецкий язык в 1899 г. и сейчас перепечатана.

Книга содержит перепечатку трактата Гюйгенса о вероятностях (1657) с существенными комментариями в части 1, исследование комбинаторики с введением и применением чисел Бернулли в части 2, решение задач на азартные игры в части 3 и, наконец, попытку создания исчисления вероятностных предположений и доказательство закона больших чисел (ЗБЧ) в части 4. Там же невыполненное обещание применить принципы искусства предположений к гражданским, моральным и экономическим вопросам.

ЗБЧ установил равноправие теоретической и статистической вероятности (т. е. дедукции и индукции) и создал основу для статистических исследований для *испытаний Бернулли*. Формула Стирлинга не была ещё известна, автор не смог удовлетворительно оценить степень сближения указанных вероятностей, и в 1924 г. Карл Пирсон несправедливо сравнил ЗБЧ с неверной птолемеевой системой мира.

В *Письме* … вычислены ожидания выигрыша игроков в различных ситуациях игры. Николай Бернулли написал Предисловие к книге, которое не попало в перевод, а в 1809 г. перенёс в свою диссертацию куски текста книги и даже отрывки из *Дневника* Якоба, который вообще не был предназначен к публикации. Переводчик сильно модернизировал текст книги, а местами даже пересказал его.

Bollobás B., Paul Erdös and probability theory. *Random Structure Algorithms*, vol. 13, No. 3 – 4, 1998, pp. 521 – 533. Реферат 0960.01009

Эрдёш (1913 – 1996) родился в Венгрии, но работал в Англии, США и Израиле. После 1954 г. он стал *странствующим учёным*, официально проживавшим в Израиле. Эрдёш написал примерно 1500 статей (многие из которых не опубликованы), в основном по теории чисел, комбинаторике, теории интерполяции, теории множеств и теории вероятностей. Вместе с соавторами, которых было примерно 500, он создал вероятностную теорию чисел. теорию случайных и экстремальных графов. В теории вероятностей он уточнил закон повторного логарифма Хинчина, а вместе с М. Кацем доказал несколько вариантов центральной предельной теоремы и существенно продвинул закон арксинуса.

Brady M. E., J. M. Keynes' position on the general applicability of mathematical, logical and statistical methods in economics and social sciences. *Synthèse*, t. 76, No. 1, 1988, pp. 1 – 24. Реферат 0647.90020

По поводу применения математики в экономике Кейнс высказывался против неверного приложения некоторых методов, но не против количественных методов вообще. Однако, автор цитирует Кейнса, который заявил, что математические рассуждения ныне применяются *скорее в своём символическом, а не количественном характере*. Он полагает, что общий подход Кейнса косвенно подтверждается неудачами исправления политических предсказаний и пояснения прошедших политических событий непосредственным приложением теории игр. Наконец, автор утверждает, что Кейнс предвидел некоторые современные выводы о том, что статистический анализ нельзя применять в экономике так же, как в естествознании.

Bru B., Doeblin's life and work from his correspondence. In Cohn H., редактор, *Doeblin and Modern Probability. Proc. Doeblin Conf. 1991*. Blaubeuren, Germany. *Contemp. Math*., vol. 149, 1993, pp.1 – 64. Реферат 0786.01014

Статья основана на архивных материалах и содержит биографию Вольфганга Дёблина (1915 – 1940) и описание его трудов, в том числе неопубликованных, и его связей с ведущими специалистами (Фреше, Леви, Колмогоров, Дуб). Приведён подробный комментарий, список его трудов, ранее неопубликованная переписка с Фреше, Леви, Колмогоровым Дубом. Среди писем есть неопубликованная рукопись Дёблина на французском языке *О решении уравнения Чепмена Хостинским* и выдержка из письма Колмогорова Фреше (1937) с

фразой: *Дёблин должен опубликовать исследования цепей Маркова вне зависимости от того, кто их автор*. Будучи евреем и солдатом французской армии, он застрелился, чтобы не попасть в плен.

Bru B., Bru Marie-France, Bienaymé O., La statistique critiquée par le calcul des probabilités. Deux manuscrits inédites d'I. J. Bienaymé. *Rev. hist. math.*, t. 3, No. 2, 1997, pp. 137 – 239. Реферат 902.01008

Опубликованы две рукописи, хранящиеся у непосредственного потомка Бьенеме с предисловием, обширными комментариями (описанием положения статистики во Франции в середине XIX века и библиографией. Первая рукопись очевидно является отчётом о сообщении Бьенеме и не была опубликована *случайно*.

1. Извлечение из сообщения Филоматическому обществу (Парижа) 1842 г. без первых пяти страниц. Сообщение посвящено философским проблемам теории вероятностей и критике закона больших чисел Пуассона.

2. Сообщение Академии моральных и политических наук 1855 г. Бьенеме снова критикует закон больших чисел и замечает, что ошибки наблюдения или испытаний не всегда компенсируются даже в больших числах.

Bru B., Martin T., Le baron de Férussac, la couleur de la statistique et la topologie des sciences. *J. Electron. hist. prob. stat.*, t. 1, No. 2, 2005, article 3. Реферат 1106.01012

Это сообщение является выдержкой из статьи об участии Курно в *Bull. général et universel des annonces et de nouvelles scientifiques* (1823 – 1831), который редактировал André d'Audebard, барон Ферюссак (1786 – 1836). Его журнал обычно называли *Bull. de Férussac*. Авторы указывают, что Курно, видимо, приобрёл свою *научную культуру* в *Бюллетене*. Указанное сообщение будет опубликовано в т. 11 *Полного собрания сочинений* (*Oeuvres complètes*) Курно (опубликован в 2010 г.).

Офицер (дослужившийся до подполковника) и натуралист, об исследовании раковин которого в 1805 и 1812 гг. положительно отозвался Кювье, принадлежал только к научной обочине. Это объяснялось его общим взглядом на науку и чертами характера. В основном он интересовался систематизацией и интернационализацией науки и её географическим распределением, и авторы сообщения назвали его *Бюллетень* французской Всемирной паутиной того времени.

Этот журнал выходил в восьми выпусках, но Феруссак с одним или двумя помощниками руководил всеми. Первый выпуск относился к математике, астрономии, физике и химии, а о содержании его 16 томов см. R. Taton, *Arch. intern. hist. sci.*, t. 26, 1947, pp. 100 – 125. Шестой выпуск был посвящён географии, *общественной экономике* и путешествиям и, косвенно, статистике, которая была таким образом отделена от теории вероятностей. Впрочем, по мнению авторов Феруссак не стал бы возражать против философских вероятностей Курно.

За первые пять лет *Бюллетень* опубликовал 80 тысяч статей, частично написанных выдающимися авторами; мы сами назовём Пуассона, 1830. Бюро *Бюллетеня* стало научным центром Парижа и деятельность Феруссака *ускорила прогресс математических наук в XIX веке* (с. 15 сообщения).

Не удовлетворяясь университетской статистикой и в основном следуя за Фурье, Феруссак сформулировал цели социальной статистики и настаивал на применении числовых таблиц и графическом представлении данных.

Cantor G., Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Зачитано в 1873 г., перепечатано в 1932 г.. *J. electron. hist. prob. stat*, t. 2, No. 1b, 2006, article 8. Реферат 1107.01010

Это перепечатка популярного отчёта Кантора 1873 г. из его *Ges. Abh. math. und phil. Inhalts … mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor – Dedekind*. Редакторы E. Zermelo, A. Fraenkel. Berlin, 1832, pp. 357 – 367. Это издание сопровождается французским переводом отчёта, только в котором приведено указанное здесь библиографическое описание.

Кантор рассматривает основных авторов исчисления вероятностей (Паскаль, Ферма, Гюйгенс, Муавр, Лаплас, Гаусс), однако лишь поверхностно описывает их математические рассуждения. На с. 362 он указывает, что Якоб Бернулли доказал закон больших чисел *с некоторыми ограничениями*, но что его доказательство *может быть полностью уточнено*. Мы этого не понимаем, поскольку доказательство Я. Б. считается безукоризненным.

Кантор высоко оценивает письмо 1666 г. Спинозы, в котором автор применил ожидание, притом что Кантор не уверен в том, что Спиноза был знаком с перепиской Паскаля и Ферма. Впрочем, J. Dutka, *Scripta math*., t. 19, 1953, pp. 24 – 33, заявил, что Спиноза был в дружественных отношениях с Гюйгенсом. Кантор не упомянул классическое сочинение Тодхантера, и возможно, что оно не было ещё известно в Германии.

Кантор не занимался теорией вероятностей, что не противоречит его выбору этой дисциплины в качестве темы своего отчёта. Возможно, что он в какой-то мере интересовался ей: в своих письмах он называл Кронекера, который отрицал возникающую теорию множеств, *господином Де Мере* (Fraenkel A. G., G. Kantor. *Jahresber. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 39, 1930, pp. 189 – 266, p. 199). Френкель повторил своё замечание в очерке о Канторе, который был опубликован в *Ges. Abh.* последнего на с. 459.

Ges. Abh. не указывает точной даты первоначальной публикации отчёта Кантора, названы только *Sitz. Ber. Naturforsch. Ges. Halle* 1873. Мы можем только заключить, что отчёт появился не ранее 1877 г., т. е. даты, которую указал Френкель в 1930 г.

Cartier P., Poincaré's calculus of probability. В книге Charpentier E., редактор, *The Scientific Legacy of Poincaré*. Перевод с французского. *Hist. Math.*, vol. 36, 2010, pp. 279 – 292. Реферат 1247.0102

Очерк, основанный на известном трактате Пуанкаре 1896 /1912, 1987 г. Русский перевод: Ижевск, 1999.

Автор почти не рассматривал ни геометрическую вероятность, ни хаотические процессы, поскольку эти темы изучались в других разделах сборника.

В 1892 г. Пуанкаре отказался признать статистический характер кинетической теории газов. И, как и Милль, он не верил в приложение теории вероятностей к *моральным* наукам (к статистическому изучению почерка в пресловутом деле Дрейфуса).

Пуанкаре не был знаком с историей теории вероятностей и слишком доверял Бертрану (даже назвал его крайне неудачный трактат классическим). Первое (1809) гауссово обоснование метода наименьших квадратов Пуанкаре считал основательнее второго. Он не упоминал Чебышёва, не знал французской статьи Маркова 1910 г. о цепях (Маркова) и потому вряд ли вразумительно обосновывал равномерность распределения астероидов вдоль эклиптики. Даже Пуассон для него не существовал!

Ничего подобного автор статьи не заметил, но зато он связал рассуждения Пуанкаре, начиная с определения вероятности, с современной физикой и математикой. Редактор книги ошибочно приписал Лапласу, а не Муавру, классическое определение вероятности и доказательство первого варианта центральной предельной теоремы.

Мы воспользовались своими статьями о Пуанкаре и Бертране из *Arch. hist. ex. sci*. (vol. 42, 1991, pp. 137 – 171; vol. 48, 1994, pp. 155 – 199).

К. В. Чебышёва, Некоторые сведения о предках и потомках семьи Чебышёвых. *Историко-математич. исследования*, вып. 32/33, 1990, с. 431 – 451. Реферат 0728.01016

По семейным преданиям, род Чебышёвых ведёт начало от двух татарских княжичей, сыновей татарского полководца Хана Чебыша. Семья упоминается в хрониках с начала XVII в. Во второй половине века трое членов семьи получили царские грамоты за ратные заслуги и верную службу. Автор приводит их тексты в своём переводе на современный русский язык. Она также сообщает сведения о мужском потомстве Петра Львовича Чебышёва, брата великого математика, и замечает, что он произносил свою фамилию с ударением на последнем слоге. Отношение автора к роду Чебышёвых не разъяснено.

Кромби А.К. Об общем воздействии математики на натурфилософию Запада. *Историко-математич. исследования*, вып. 21, 1976, с. 29 – 50. Наш перевод рукописи автора. Реферат 12А8, 1977, РЖМат

Описаны взгляды ряда учёных XII – XVI вв. (Гундисалво, Леонардо да Винчи, Фичини, Дж. Валла) на науку и искусство, и, в частности, на предмет математики и её место в системе наук. Отмечено отделение архитекторов от *практиков* (примерно в XII в.) и возникновение в итальянских городах XIV в. слоя *мастеров-инженеров*, практического применения законов линейной перспективы художниками и скульпторами того же времени и признания необходимости науки вообще (тогда же) и математики, в частности для зодчества (XVI в., восходит к Витрувию).

Приведены длинные выдержки (на английском языке) из сочинений многих учёных, в том числе отрывок из утерянной книги Архита Тарентского *О математике* в переводе с латинского перевода Валлы.

Автор полагает, что подъёму математики и экспериментальных наук на Западе после переоткрытия греческой науки особо способствовала привычка к разумным рассуждениям и вычислениям, которая проявилась во всех видах деятельности, и что главным достижением философских дискуссий XVI в. было *уточнение интеллектуального мировоззрения, моральных обязательств и надежд в культуре каждого народа*.

Dale A. I., *History of Inverse Probability. From Thomas Bayes to Karl Pearson*. New York, 1999. Второе издание. Реферат 922.01006

В этом издании примерно на 175 страниц больше, чем в первом, 1991 г. Библиография включает около 650 наименований, из которых 36 были опубликованы в 1991 г. или позже. Однако, не включены ни собрания сочинений Бернштейна, Эджуорта и Гюйгенса, ни новые издания трудов Кондорсе, Лакруа, Курно и др. Несколько библиографических ошибок первого издания не исправлены.

В основном описаны труды Бейеса, Кондорсе, Лапласа и Пуассона и уделено много внимания Мичеллу, Курно, Де Моргану, Булю, Эджуорту и Карлу Пирсону. Дейл цитирует, многих комментаторов, но не высказывает собственного мнения о них. Он – любитель редких слов, два из которых не включены в *Concise Oxford Dict*. (1973). Он не переводит выдержек из французских и немецких текстов и даже из латинского текста *Дневника* Якоба Бернулли. Точных ссылок на многочисленные эпиграфы отсутствуют, и часть их них была излишней.

В книге нет указаний на соотношения обращённой вероятности, индукции и статистики, и хорошо знакомый с литературой автор мог бы лучше описать историю последней.

Dale A. I., *Most Honourable Remembrance. The Life and Work of Thomas Bayes*. New York, 2003. Реферат 1030.01031

Описание жизни и трудов Бейеса и комментированные перепечатки его опубликованных трудов и частично рукописей (учение о флюксиях; полу-сходящиеся (semi-convergent) ряды; мемуар 1764 – 1765 гг. об учении о случае; электричество; часть записных книжек о математике, небесной механике и электричестве). Бейес показан как математик высшего класса. Сопутствующий материал включает обсуждение эпидемий чумы.

Многое относится к общей истории, этике и богословию, и книгу следовало бы разбить на две или три части. Так, перепечатан и снабжён подробными комментариями богословский трактат Бейеса. Излишние и часто ненужные подробности приводят к замешательству. На с. 259 Дейл даже обсуждает, является ли скромность добродетелью и ссылается на три источника, включая Аристотеля.

Чёткие сведения часто отсутствуют. Слишком длинна и нескладна биография Бейеса, библиографии его трудов нет, история *теоремы Бейеса* в XX в. не описана. Латинские выдержки иногда даются без перевода, зато длинная выдержка из *Начал* Ньютона напрасно приведена и на английском, и на

латинском языках. Многие эпиграфы притянуты за уши, обычно без точных ссылок. Наконец, неясно, что нового в этой книге по сравнению со всеми предыдущими работами автора.

Dasgupta S., The evolution oft he D^2-statistic of Mahalanobis. *Sankhya*, vol. A55, No. 3, 1993, pp. 442 – 459. Реферат 0810.01002

Автор рассматривает статистические исследования Махаланобиса (1922 – 1949) антропометрических отличий между популяциями различных рас и историю его общего статистического инструмента, статистики D^2 (расстояния Махаланобиса). Он замечает, что в 1930 г. Карл Пирсон не согласился с Махаланобисом и упоминает родственные статьи Фишера (1930), Хотеллинга (1930) и Bose & Roy (1938).

Daston L., How probabilities came to be objective and subjective. *Hist. Math.*, vol. 21, No. 3, 1994, pp. 330 – 344. Реферат 0805.01009

Автор замечает, что различие между субъективной и объективной вероятностями начало всерьёз изучаться в 1840-е годы (Пуассон, Курно, Эллис) и что мнения учёных о точном значении этих понятий не совпадали. Кроме того, она обсуждает диалектику случайности и необходимости, но ошибочно полагает, что Муавр отрицал случай и что Лаплас, и по смыслу, Муавр, были *твёрдо-каменными детерминистами*. На самом деле Муавр определил основную цель своего *Учения о случае* как отделение случайного от необходимого, а Лаплас заявил, что детерминизм был бы возможен только сверхчеловеческому разуму, и во всяком случае его *детерминизм* не помешал ему сделать фундаментальные открытия.

Derriennic Y., Pascal et les problèmes du chevalier de Méré. *Gaz. Math. soc. Fr.*, t. 97, 2003, pp. 45 – 71. Реферат 1034.01023

Автор описывает решение задачи на раздел ставки по исследованиям Паскаля в его переписке с Ферма и в *Трактате об арифметическом треугольнике* и устанавливает связь между этой темой и остановленным мартингалом (F. Black & M. Scholes, *J. polit. econ*., t. 81, 1973, pp. 637 – 654).

Desrosières A., *The Politics of Large Numbers. History of Statistical Reasoning*. Перевод с французского. Cambridge (Mass). – London, 1998. Рецензия: *Isis*, vol. 92, 2001, pp. 184 – 185

Автор описывает статистику во Франции, Англии, Германии и США (Россия с её земской статистикой упущена). Его стиль тяжеловесен (много длинных предложений), в переводе попадаются необычные слова, а Якоб Бернулли всё ещё остался Жаком. Название известной книги Курно 1843 г. переведено неверно.

Автор приписывает изобретение таблицы смертности Гюйгенсу (с. 18), а строгий закон больших чисел – Пуассону (с. 89). Гаусс будто бы вывел нормальный закон как предел биномиального распределения (с. 75), а Муавр вывел его не в 1733, а почему-то в 1738 г. (с. 286). Распределение Симпсона описано неверно (с. 64), а закон больших чисел будто бы не связан с дисперсией (с. 214).

Статистические работы на континенте Европы в конце XIX и начале XX в. не упомянуты, противодействия эмпиризму Карла Пирсона будто бы не было. Описание среднего человека Кетле и трудов Лексиса весьма поверхностно.

Это не всё. На разных страницах одно и то же событие происходит в разное время (статистические конгрессы, см. с. 80 и 154; первые годовые отчёты о преступности во Франции, с. 89, 152. 247; появление мемуара Бейеса, с. 7 и 57). Взгляды Лейбница, авторов Пор-Рояля (1662), Якоба Бернулли не обсуждаются, взамен автор ухватывается за холизм и номинализм. Массовые случайные события и диалектика случайного и необходимого забыты. Обсуждаются общественная гигиена и эпидемиология, но не назван ни Сноу (открывший пути распространения холерных эпидемий), ни даже Дженнер.

Doob J. L., Probability vs. measure. Ред., Ewing J. H. et al., *Paul Halmos, Celebrating 50 Years of Mathematics*. New York, 1991, pp. 189 – 193. Реферат 0791.60001

Автор замечает, что некоторые вероятностники считают, что поглощение теории вероятностей теорией меры было бесполезным. Он сам полагает, что *психологическое объединение* указанных теорий неполно и что некоторая часть теории вероятностей не нуждается в *тонких понятиях теории меры*. Он также утверждает, что предшествующее подчёркивание независимости в теории вероятностей ныне заменилось ударением на условную вероятность и условное ожидание и что *исторический не-математический контекст теории вероятностей привёл к успеху и теорию меры, и собственно теорию вероятностей*.

Doob J. L., The development of rigor in mathematical probability (1900 – 1950). *Amer. Math. Monthly*, vol. 103, No. 7, 1996, pp. 586 – 595. Реферат 0865.01011

Перепечатка статьи автора из *Development of Mathematics 1900 – 1950*. Редактор J.-P. Pier. Basel, 1994, pp. 157 – 170. Это – *неформальный набросок* со многими выдержками из

классических источников без точных ссылок. Автор обозревает введение теории меры в теорию вероятностей, замечает методические и психологические трудности, связанные с исчезновением *романтических побочных оттенков* вероятности и обсуждает влияние новой теории вероятностей на анализ и нынешние отношения между этими дисциплинами.

Dutka J., The incomplete Beta function – a historical profile. *Arch. hist. ex. sci*., vol. 24, 1981, pp. 11 – 29. Реферат 465.01002

Обзор применения неполной B-функции и методов её вычисления от Ньютона до самых последних дней. Обсуждаются работы Бейеса, 1784; Лапласа, 1778 и 1785; Гаусса, 1811; Маркова, 1899; К. Пирсона, 1934. Как и Э. Пирсон, автор заключает, что К. П. был знаком лишь с успехами теории вероятностей.

Дутка заключает, что в гл. 3 *Анал. теор. вер*. Лаплас доказал самый ранний вариант центральной предельной теоремы, а на с. 18 (прим. 17), что Монмор опубликовал свою книгу об азартных играх в 1714 г. (на самом деле, в 1708 и 1713 гг.). В указанной главе Лаплас уточнил предельную теорему Муавра (которая, по крайней мере в российской литературе, теперь называется по их обеим именам). Центральную предельную теорему Лаплас весьма нестрого доказал в 1810 – 1811 гг.

Dutka J., On the problem of random flights. *Arch. hist. ex. sci*., vol. 32, No. 3 – 4, 1985, pp. 351 – 375. РЖМат 12А11 (1985)

Дан обзор литературы по случайному блужданию точки с непрерывным изменением направления её движения (*случайный полёт* по терминологии Дж. У. Рэлея, 1919). Освещена предыстория вопроса, включая работы Крофтона (M. W. Crofton), 1865 г., Рэлея 1880 г., Росса (B. Ross) 1905 г., Клюйвера (J. C. Kluyver) 1905 г., Смолуховского 1906 г., Уотсона (G. N. Watson) 1922 г. и др. вплоть до середины XX в.

Особо рассмотрены применение характеристических функций (*с раннего XIX в.*), разрывных множителей, а также восходящее к Рэлею (1880) изучение сложения колебаний с фиксированными амплитудами и частотами и случайными фазами. Чёткую формулировку задачи о случайном блуждании точки по плоскости автор находит уже у Росса.

В 1846 г. Буняковский рассмотрел простой случай обобщённого случайного блуждания ладьи по шахматной доске.

Dutka J., On Gauss' priority in the discovery of the method of least squares. *Arch. hist. ex. sci*., vol. 49, 1996, pp. 355 – 370. Реферат 854.01015

Исходя из того же градусного измерения, что и Гаусс в 1799 г., автор выводит сжатие земного эллипсоида вращения по методу наименьших квадратов (МНКв), сравнивает результаты и заключает, что Гаусс также применял МНКв. Аналогичный вывод он делает по поводу обработки Гауссом таблицы уравнения времени Улугбека. Утверждение Дутки о том, что фон Цах подкрепил приоритет Гаусса, не убедителен, поскольку последний не был ознакомлен с МНКв.

Дутка противоречит Стиглеру, который вообще оклеветал память Гаусса (и Эйлера), см. нашу последующую рукопись – скачиваемый документ 31 (*Антистиглер*) на моём сайте www.sheynin.de или Google, Oscar Sheynin, Home). Автор не доказал своего утверждения о том, что повторительный теодолит изобрёл Борда, а не Майер, и допустил две ошибки в своей библиографии.

Edgeworth F. Y., *Writings in Probability, Statistics and Economics*, vols. 1 – 3. Редактор McCann Ch. R. Jun. Cheltenham, 1996. Реферат 0860.01035

Перепечатка 76 статей и 13 рецензий, в основном включённых в библиографию Kendall & Doig (1968). Семь из воспроизведённых рисунков оказались чёрными прямоугольниками. Постороннее примечание появилось на с. 283 т. 1, но со с. 291 т. 3 исчезло нужное примечание. Сочинения, не попавшие в это собрание, не упомянуты, и неизвестно, были ли использованы существующие библиографии его работ, Kendall (1968) и Mirowski (1994).

В т. 2 трудно отделить закон ошибок от теории ошибок, демография вряд ли является социальной наукой, психология – естественнонаучная дисциплина, а статья о коррелированных средних не должна быть отнесена к приложениям.

Эджуорт ознакомился со статистическими работами на континенте, но возражал против замены *математики Лапласа* открытиями русской школы и отрицал окончательное гауссово обоснование принципа наименьших квадратов (т. 1, с. 62). Но он изучал асимметричные плотности, стремился применить метод наименьших квадратов к кривым Пирсона и применял статистический метод к самым разнообразным отраслям знания. Его отчуждённость, своеобразный стиль и недостаточное доверие к количественным данным существенно ослабили его влияние, но его труды всё же способствовали развитию статистики в Англии.

Edwards A. W. F., Pascal and the problem of points. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 50, No. 3, 1982, pp. 259 – 266. Реферат 501.01005

Автор обсуждает задачу раздела ставки в переписке 1654 г.

Паскаля и Ферма. Он подчёркивает различие их методов и утверждает, что именно Паскаль ввёл ожидание и *метод ожидания*, и подчёркивает значимость трактата Паскаля *Об арифметическом треугольнике* 1665 г. для развития теории вероятностей.

Более существенным представляется применение ожидания для решения задачи о разделе ставки обоими учёными. Различию между Паскалем и Ферма можно придавать меньше значения, см. нашу статью в *Arch. hist. ex. sci.*, vol. 17, 1977, pp. 201 – 259 (p. 239).

Edwards A. W. F., R. A. Fisher on Karl Pearson. *Notes Rec. Roy. Soc. Lond.*, vol. 48, No. 1, 1994, pp. 97 – 106. Реферат 0792.01034

В 1945 г. Фишер прислал рукопись о Пирсоне редактору издания *Dict. Nat. Biogr.*, а через год комментировал её отредактированный черновик. Он заявил, что *технические* работы Пирсона *малозначащи*, что его критерий хи-квадрат был *важнейшим* из подобных работ и что труды Эджуорта и Стьюдента пострадали ввиду черт характера Пирсона. В последующем письме того же года Фишер заметил, что Пирсона не следует представлять *высоко парящим гением*.

Ввиду разногласий с редактором Фишер отозвал свою рукопись, и статью о Пирсоне опубликовал Гринвуд, который, однако, применил большую её часть в своей последующей статье 1950 г.

Автор использовал архивные данные, хранящиеся в Аделаиде, и напечатал первый черновой вариант рукописи Фишера. В ней тот подчёркивал влияние Гальтона на Пирсона, утверждал, что последний не признал значимости теории Менделя и что его острая критика *замедлила реальный прогресс* статистики.

Edwards A. W. F., *Pascal's Arithmetic Triangle. The Story of a Mathematical Idea*. Пересмотренная перепечатка издания 1987 г. Baltimore, 2002. Реферат 1032.01013

Трактат об арифметическом треугольнике был опубликован посмертно, но уже в 1654 г. Ферма имел его начало. *Трактат* состоит из четырёх частей, последняя из которых была частично написана на латинском языке. Кроме решения задачи на раздел ставки материал *Трактата* был уже известен, но Паскаль первым строго доказал некоторые важные предложения.

Автор описывает раннюю историю арифметического треугольника и последующие открытия, частично сделанные с его помощью, но в основном без знания *Трактата*. Лучшим наименованием этого сочинения Паскаля было бы *История*

арифметического треугольника.

Второе издание книги автора содержит Эпилог (новая литература) и продолжение обсуждения соответствующих глав *Искусства предположений* Якоба Бернулли. Неверно сказано (с. 121), что Николай Бернулли подготовил эту книгу к печати и не указано два источника: А. П. Юшкевич, *История математики в Средние века*, 1961, и R. Rashed, Kombinatorik und Metaphysik. В книге *Festschrift zum siebstigsten Geburtstag von M. Schraum*. Берлин, 2000, с. 37 – 54.

Ekeland I., *The Broken Dice and Other Mathematical Tales of Chance*. Transl. from the French. Chicago, 1993.
Реферат 785.60002

В нескольких нематематических частях книги автор обсуждает исторические события (многие, относящиеся к Скандинавии), исход которых определялся ворожбой, основанной на случае или психологической готовностью принимать рискованные решения. И он замечает (с. 145), что *индустриальная цивилизация движется вперёд, не измеряя сопутствующих рисков*.

Остальное содержание в основном посвящено имитации случая (с обсуждением рукописи 1240 – 1250 гг. норвежского монаха Эдвина), странным аттракторам и экспоненциальной неустойчивости. Автору следовало подчеркнуть, что за последние десятилетия понимание роли случая существенно изменилось. Он, к сожалению, не упомянул ни Мизеса, ни фундаментальную проблему определения конечной случайной последовательности. Два его утверждения слишком категоричны: Колмогоров основал теорию вероятностей (с. 147) и нормальный закон универсален (с. 158).

Faucher R. E., Galton on examinations. An unpublished step in the invention of correlation. *Isis*, vol. 80, No. 303, 1989, pp. 446 – 455.
Реферат 0691.01010

Автор обсуждает раннюю работу Гальтона о корреляции (1874 – 1888) и описывает его неопубликованную архивную статью, которая *относится к 1883 г.* и хранится в его бумагах в Университетском колледже Лондона. Гальтон пытался отыскать связь между оценками на экзаменах и успехами в жизни и, в частности, подошёл к идее о ранговой корреляции, но не достиг цели. Однако, его анализ содержал методические новшества, которые помогли ему осуществить прорыв в теории корреляции.

Автор замечает, что Гальтон высоко ценил преимущества экзаменов и указывает, что в 1901 г. тот пожелал, но, видимо, так и не возобновил своего конкретного исследования.

Ранговая корреляция восходит к Л. Зейделю (1865 – 1866), если не к Лапласу. Зейдель количественно, хоть и окольным путём, оценил значимость корреляционного соотношения между двумя и тремя переменными, см. нашу статью в *Arch. hist. ex. sci*., vol. 26, No. 3, 1982, pp. 277 – 279.

Позднейшая вставка. В 1876 г. Гальтон фактически применил ранговую корреляцию при решении биологической задачи, о чём его попросил Дарвин. См. Шейнин О. Б. (2019), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G,** 11 (§ 11.6).

Feldman J., Lagneau G., Matalon B., редакторы, *Moyenne, milieu, centre. Histories et usages*. Paris, 1991. Реферат 747.01002

В сборнике 18 статей, написанных редакторами и 13 другими авторами, в основном после 1989 г. Он состоит из трёх частей (средние в статистике, 6 статей; в физических науках и науках о человеке, 9 статей; и географические центры, 3 статьи, быть может полезные для туристов). Указателей нет. Две статьи, возможно пересмотренные, были опубликованы ранее.

В статьях рассмотрены история темы (статистики, социологии, теории ошибок, психологии, и в некоторой степени философии, биологии, экономики, антропологии и общественной гигиены). Хронологические границы статей существенно разнятся от примерно 1660 г. до середины XX в., и главными действующими лицами являются Кетле, Конт, Л.-А. и А. Бертильоны, Брока и Гальтон.

M. Barbut описывает историю центральной предельной теоремы и устойчивых законов. В другой статье он рассматривает различные средние и заключает, что для количественных переменных смысл имеют только обычные средние. M. Armatte описывает историю теории ошибок в связи с градусными измерениями, а B. Monjardet изучает среднего человека Кетле, которого видоизменил Фреше, и описывает историю задачи (Ферма) об определении точки, сумма расстояний которой до трёх заданных точек минимальна. Он рассматривает несколько метрик и исследует много интересных приложений.

Имеются серьёзные недостатки. Астрономия и метеорология не обсуждаются и ничего не сказано о древнем учении о средних. В 1855 г. Сноу показал способ борьбы с холерой простым сравнением двух средних, но он не упомянут. На с. 70 Симпсон ошибочно назван учеником Муавра, а на с. 85 Зюссмильх, а не Граунт и Петти назван создателем политической арифметики. По поводу вымышленной некомпетентности Эйлера в статистике (с. 69) см. нашу статью *Arch. hist. ex. sci*., vol. 46, 1993, pp. 49 – 50.

Позднейшая вставка. Луи-Альфонс Бертильон, статистик.

Статистически изучал население Франции. Альфонс Бертильон, автор бертильонажа, опознания (преступника) по антропометрическим данным. Его нововведение действовало, но надолго задержало опознание человека по отпечаткам пальцев. В семье он считался паршивой овцой, был заядлым антисемитом и выдал заведомо неверное заключение о почерке в позорном деле Дрейфуса. Поль Брока, хирург, этнограф, анатом и антрополог.

Field J. V., Tycho Brahe, Johannes Kepler and the concept of error. *Festschrift for Volker Bialas. 47. Münchener Universitätsschriften*, 2005, pp. 143 – 155. Реферат 1086.01022

Автор утверждает, что регулярные наблюдения Тихо были частично вызваны астрологическим влиянием Парацельса без учёта более ранней астрономической практики. Кеплер, как она полагает, счёл, что погрешность наблюдений Тихо не превышает 4 минут. Она заключает, что понятие об ошибке наблюдения было внесено в астрономию *когда-то между* Тихо, изготовителями его инструментов и Кеплером.

Её рассуждение о более ранней истории, а потому и вывод ошибочен. Птолемей, Бируни и Леви бен Гершон обсуждали эти ошибки и умели уменьшать влияние некоторых из них. Птолемей засвидетельствовал, что уже Гиппарх наблюдал регулярно. Новым у Тихо была намного более точность наблюдений.

De Finetti B., Cambridge probability theorists. *Riv. mat. sci. econ. e soc*, t. 8, No 2, 1985, pp. 79 – 91. РЖМат, 10A14 (1985)

Обзор сочинений Дж. М. Кейнса *Трактат о теории вероятностей* (1921) и Г. Джеффриса *Научные выводы* (1931). Основные направления обзора: соотношение теории вероятностей и логики; субъективная вероятность (которой автор придерживается в отличие от Кейнса и Джеффриса); индукция; принципы исчисления вероятностей.

Автор полагает, что указанными книгами нельзя пренебрегать, что использованная в них литература недостаточно известна, и что *кембриджская философия* продолжает традиции Локка, Беркли и Юма.

Fischer H., Dirichlet’s contributions to mathematical probability theory. *Hist. math.*, vol. 21, 1994, pp. 39 – 63. Реферат 795.01007

В основном автор описывает неопубликованные курсы Дирихле по теории вероятностей (1838 – 1846), которые тот начал читать в 1829 г. Дирихле не описывал ни *моральные* приложения теории, ни её философские проблемы, а при обсуждении принципа наименьших квадратов пренебрёг его гауссовым обоснованием.

Он основал свой курс на интегральном исчислении и при доказательстве центральной предельной теоремы представил её строже, чем Чебышёв в 1879/1880 г. Автор не замечает, что Чебышёв сам указал, что его вывод нестрог и что в 1887 г. он предложил гораздо более строгое доказательство.

Fischer H., J. F. Fries und die Grenzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. В книге *Festschrift für Ivo Schneider*. Stuttgart, 2004, pp. 277 – 299. Реферат 1072.01007

Автор подчёркивает различие объективной и субъективной вероятностей, отмеченное в литературе XVIII и XIX вв., например, Пуассоном и Курно. Он критикует пуассоново исследование отправления правосудия и указывает, что подобные приложения теории вероятностей стали отрицать как противоречащие этическим нормам – фактически главным образом потому, что ошибочно полагали, что статистические выводы относятся к данному человеку.

Основным героем автора является Фриз (1773 – 1843) со своим сочинением 1842 г. Он замечает, что Фриз, который во многом следовал за Кантом, подчёркивал значимость субъективной и философской (качественной) вероятности и отрицал всеобщую применимость стохастики, в частности потому, что она бесполезна при принятии решения. Многие учёные, начиная с Ньютона, придерживались противоположного мнения.

Фриз пытался философски объяснить устойчивость статистических средних, критиковал приложение теории вероятностей к юриспруденции и назвал принцип наименьших квадратов произвольным. Наконец, автор объясняет упадок теории вероятностей после Лапласа, но ошибается: фактически никакого упадка не было: эта теория длительное время продолжала быть прикладной дисциплиной, какой её считал Лаплас. Случайные величины не изучались сами по себе и создание истинно математической теории вероятностей было невозможно. К тому же, статистики доверяли лишь схеме Бернулли, в противном же случае отрицали применимость математики.

Forsina A., Giorgi G. M., Early Gini's contributions to inequality measurement and statistical inference. *J. electron. hist. prob., stat*., t. 1, No. 1, article 3, 2005, 15 pp. Реферат 1076.01026

В основном авторы обсуждают работы Конрадо Джини (1884 – 1965) по измерению экономического неравенства, теорию статистических рядов и понятие переставляемости. Джини доказал ошибочность вывода Парето о сохранении распределения богатств во времени и в пространстве и предложил свои собственные меры неравенства, одна из которых всё ещё интересна (индекс Джини).

Но история этих мер рассмотрена поверхностно. Даже спор Джини и Борткевича (в котором Борткевич, правый по существу, не сослался на Джини) не рассмотрен. Появление понятия переставляемости, уже отмеченная первым автором (*J. Roy. stat. soc.*, vol. A156, 1993), должна быть приписана Чупрову и его ученику Мордуху (E. Seneta, *Hist. math*. vol. 14, 1987).

Franklin J., *The Science of Conjecture. Evidence and Probability before Pascal*. Baltimore, 2001. Реферат 996.01001

Автор исследует историю методов принятия решений при неопределённости (с. ix) от древности до Гюйгенса и Лейбница (даже не до Паскаля) и обращает особое внимание на соответствующие количественные (стохастические) рассуждения. Книга содержит полезные, иногда еле известные сведения о юриспруденции, философии, медицине и религии. Автор утверждает, что Средневековье было плодотворно и существенно для дальнейшего развития науки (и теории вероятностей в частности). Он также рассматривает астрономию (Коперник, Галилей, Кеплер), сделки о будущих фактах, игры в кости и лотереи, снова с минимальными количественными оценками, включая задачу о разделе ставки (примерно 1400 г.).

Много недостатков. Поверхностно рассмотрена разумная обработка непосредственных наблюдений у Птолемея; пропущена предыстория закона больших чисел (Кардано, Кеплер), фундаментальная задача отделения случайности от необходимости лишь упомянута. Упущена связь средневекового учения о пробабилизме с неаддитивными вероятностями (Якоб Бернулли), между качественным подходом к принятию решений или недавно появившейся оценкой экспертных мнений и самОй сутью древней науки. Методы обращения с неопределённостью не систематизированы, да и вообще еле намечены. Их следовало бы назвать принципами и тесно, а не слабо, связать с правилами философствования Ньютона.

Цитируется много источников и комментаторов, но ссылки трудно отыскать. Не все авторы включены в указатель, и даты первых публикаций во многих случаях не указаны, а некоторые утверждения могут быть ошибочно приписаны самомУ Франклину.

Ghosh J. K., Mahalanobis and the art and science of statistics: the early days. *Indian J. hist. sci*., vol. 29, No. 1, 1994, pp. 89 – 98. Реферат 0795.01023

Член Королевского общества Прасанта Чандра Махаланобис (1893 – 1973) был пионером статистической науки в своей родной стране, Индии. Он изучал многомерный анализ, выборочные обследования и философские проблемы вероятности и статистики, равно как и приложения статистики к антропометрии и метеорологии и борьбу с наводнениями. Его сильными сторонами были интуиция и умение пользоваться простыми статистическими инструментами.

Ghosh J. K., Maiti P., Rao T. J., Sinha B. K., Evolution of statistics in India. *Intern stat. rev*., vol. 67, No. 1, 1999, pp. 13 – 34 Реферат 0927.01015

Авторы описывают развитие статистики в Индии с четвёртого века до н. э., когда (видимо, в некоторых районах) собирались подробные сведения о сельском хозяйстве, экономике и населении. Рассмотрен Британский период, в течение которого, в 1816 г., был подготовлен подробный отчёт примерно о 15 *млн* человек в духе государствоведения, а в 1881 г. начались регулярные, через 10 лет, переписи с данными о религии, географии и социологии, и, наконец, описано нынешнее положение.

Подчёркнута роль Индийского статистического института и Махаланобиса, описана основная область теоретических и прикладных статистических исследований в стране, равно как и обучение статистике и подготовка иностранных студентов в течение последних десятилетий. Основное (ожидаемое) впечатление: в области статистики Индия является передовым государством.

Гнеденко Б. В., Перес М. Т., К истории понятия вероятности случайного события. *Вопр. истории естествознания и техн.*, № 1, 1984, с. 71 – 75. РЖМат 8А15 (1984)

Прослеживается возникновение классического *лапласова* (на самом деле введённого Муавром) определения вероятности случайного события. Приводится выдержка из неопубликованной рукописи Остроградского о зарождении теории вероятностей.

Отмечая, что Якоб Бернулли неформально уже пользовался указанным определением вероятности, авторы полагают, что и этот факт, и введение статистической вероятности им же было навеяно исследованиями Граунта и Петти. Их научные выводы непосредственно опирались на статистические вероятности, которые вводились аналогично классическому определению вероятности, а не как отношение шансов *за* и *против* соответствующих событий.

Godfroy-Génin Anne-Sophie, Pascal: La géomètrie du hasard. *Math. sci. hum.*, No. 150, 2000, pp. 7 – 39. Реферат 0966.01002

В этой не-математической статье автор подчёркивает юридическую суть задачи о разделе ставки; изучает различия между латинским и французским вариантами *Трактата об арифметическом треугольнике* Паскаля; замечает там зародыш ожидания; и указывает, что Паскаль не занимался статистическими вероятностями (или шансами). В библиографии 65 наименований, но упомянуто в тексте только 11 из них.

Good I. J., Some statistical applications of Poisson's work. *Stat. sci*., vol. 1, 1986, pp. 157 – 180. Реферат 0611.60001

Автор выделяет несколько тем, которыми занимался Пуассон, и умело прослеживает их до нынешнего времени (среди них – два вида вероятностей, логический и объективный; закон больших чисел; формула суммирования, которую ни сам Пуассон, 1827, ни Коши, 1817, не применяли; распределение Пуассона; юридические решения).

Текст сопровождается обсуждением пятью комментаторами и ответом автора. Один из комментаторов, Герберт Соломон, настаивал, что исследование работы присяжных у Пуассона было прекрасным примером применения моделей в поведенческих науках. Автор не упомянул Курно, который также различал два вида вероятностей, и не сослался на нашу статью (*Arch. hist. ex. sci.*, vol. 18, 1978, с. 245 – 300).

Gurzadyan V. G., Kolmogorov and Aleksandrov in Sevan monastery, Armenia, 1929. *Math. intel*., vol. 26, No. 2, 2004, pp. 40 – 43. Реферат 11055.01017

В 1929 г. Колмогоров и его друг жизни П. С. Александров около 20 дней прожили в заброшенном монастыре на острове озера Севан. Они продолжали там работу над своими будущими публикациями на немецком языке, причём Александров помогал Колмогорову с переводами. Они также поднялись на вершину горы, возвышавшуюся над Севаном более, чем на 2 *км*, что *не представило никаких затруднений* (Колмогоров).

Hald A., Nicholas Bernoulli theorem. *Intern. stat. rev.*, vol. 52, 1984, pp. 93 – 99. Реферат 563.60002

В 1713 г. Николай Бернулли ознакомил Монмора с этой теоремой, тот же включил её в свою книгу того же года, которая вышла в свет до *Искусства предположений* Якоба Бернулли. Автор указывает, что Н. Б. существенно улучшил некоторые промежуточные оценки Якоба и заключает, что Н. Б. оказался *отсутствовавшим звеном* между результатами Якоба и Муавра.

В 1913 г., в предисловии к русскому переводу части 4 *Искусства предположений*, Марков не признал теоремы Николая Бернулли, потому что при оценке отношения между некоторыми членами бинома тот внёс произвольное допущение. Автор не обратил особого внимания на это обстоятельство. Наконец, его сообщение и о результатах Муавра, и о Н.Б. неполно, см. нашу статью в *Истории и методологии естеств. наук*, 1970, в этом сборнике.

Hald A., On De Moivre's solutions of the problem of duration of play, 1708 – 1718. *Arch. hist. ex. sci.*, vol. 38, No. 2, 1988, pp. 109 – 134. Реферат 0760.01003

В 1708 г. Монмор сформулировал задачу о продолжительности игры до разорения одного из двух игроков. Первыми её исследовали он сам и Николай Бернулли, а Муавр опубликовал свои результаты в 1711 и 1718 гг. Автор подробно описывает сочинения Муавра и воспроизводит отсутствующие у того доказательства.

Самое интересное предположение автора относится к случаю игроков с равными капиталами: Муавр исходил из некоторого рекуррентного соотношения и определил искомую функцию как линейную комбинацию конечного числа конечных геометрических прогрессий. В 1990 г. автор опубликовал книгу об истории теории вероятностей и статистики до 1750 г., и назвал ещё одного комментатора: E. C. Fieller, 1931.

Hald A., Pizetti's contributions to the statistical analysis of normally distributed observations. *Biometrika*, vol. 87, No. 1, 2000, pp. 213 – 217. Реферат 0949.01012

Автор описывает как в 1891 г. Пицетти, исходя из n независимых и нормально $N(0, \sigma^2)$ распределённых ошибок ε_i, **1.** Вывел распределение хи-квадрат с n степенями свободы, к тому времени уже не новому. **2.** Рассмотрев уклонения ε_i от своего среднего, вывел соответствующее распределение, а именно закон $\sigma^2\chi^2$ с $(n - 1)$ степенями свободы, уже известный

Гельмерту. **3.** Обобщил своё исследование, рассмотрев линейную нормальную модель и получив то же распределение с соответствующим числом степеней свободы. **4.** Определил доверительный предел для σ^2 в предыдущем случае. Этот результат оставался неизвестным до 1933 г. **5.** Разработал однофакторный дисперсионный анализ, известный нескольким авторам.

Hald A., *History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713 –1935.* New York, 2007. Реферат 1107.01006

По поводу недостающих доказательств, ссылок и сведений о близких темах автор отсылает к двум своим книгам 1990 и 1998 гг. и сообщает, что воспроизвёл около 50 страниц из второй из них.

Трудно сказать, что сейчас существенно ново, но во всяком случае только теперь можно сразу узнать у автора, скажем, содержание какого-либо мемуара Лапласа. Как всегда, автор излагает материал на высоком уровне, и сомнительно, чтобы книгу могли *легко* читать прослушавшие *элементарный курс по теории вероятностей и статистики*.

Автор сосредоточился на трёх *революциях* в своей теме: ранние мемуары Лапласа; Лаплас и Гаусс, 1809 – 1828; Фишер, 1912 – 1956 (его верхняя хронологическая граница в заглавии книги: 1935!).

Мы не согласны со многим. Вплоть до начала XX в. классическое сочинение Якоба Бернулли не стало *громадным побуждением* для статистиков (с. 14); плотность распределения в виде косинусоиды будто бы было одной из важнейших, введённых Лагранжем (с. 2), но вряд ли его когда-либо применяли. В 1799 г. проблема *среднего арифметического* ещё не была решена (с. 4), но её смягчили Симпсон и Лагранж. Мемуар Лежандра (с. 53) не был ни ясным, ни кратким. Он по сути заявил, что принцип наименьших квадратов (ПрНКв) обеспечивает минимаксное решение, а остаточные свободные члены исходных уравнений назвал ошибками.

В 1818 г. Бессель заявил, что ошибки наблюдений почти нормальны (с. 58, 98), но в 1838 г. заведомо неверно объяснил уклонения от нормальности. По сути, Бессель был не только великим учёным, но и отъявленным халтурщиком. В 1809 г. Гаусс применил обращённую вероятность (с. 57, 58), но в 1924 г. Уиттекер и Робинсон заметили, что это не было нужно ввиду постулата среднего арифметического. На с. 56 и 101 предложены две причины отказа Гаусса от своего первого обоснования ПрНКв – обе неверные. Обсуждая приложение центральной

предельной теоремы Лапласом, автор не отметил, что Лаплас фактически не доказал её.

В Библиографии нет ни собрания сочинений Эджуорта (1996), ни перепечаток сочинений Пуассона (1837) и Тодхантера (1865), а датой последнего издания *Грамматики науки* Пирсона назван 1911 г. Нет ни немецкого издания сочинений Гаусса по теории ошибок, ни книги Крамера (1946), нет ссылок ни на *Dict. Scient. Biogr*., ни на *Enc. of Stat. Sciences*, ни на книгу *Вероятность и математическая статистика. Энц.* (1999). Включена халтурная и невежественная книга Портера (1986).

Hall P., Selinger B., Statistical significance: balancing evidence against doubt. *Austr. J. Stat.*, vol. 28, 1986, pp. 354 – 370. Реферат 0621.62002

Авторы рассматривают различные подходы к статистической значимости у профессионалов и любителей, исходя из мнений Карла Пирсона, Госсета (Стьюдента) и Фишера. Они поясняют широко распространённое применение 5% уровня значимости и подчёркивают, что учёным и юристам часто приходится изучать намного более сомнительные свидетельства.

Авторы, видимо, возражают против любого априорного выбора уровня значимости и вообще рекомендуют применять более понятное соотношение *за* и *против* либо совместно с уровнем значимости, либо вместо него. Они не указывают, что в гл. 2 части 4 *Искусства предположений* Якоб Бернулли предложил устанавливать уровень значимости для судов, а Гаварре рекомендовал то же самое для врачей-терапевтов (наша статья в *Arch. hist. ex. sci.*, vol. 26, 1982, pp. 241 – 286).

Higgs E., The general register office and the tabulation of data, 1837 – 1939. Редакторы Campbell-Kelly M. и др., *The History of Mathematical Tables from Sumer to Spreadsheets*. Oxford, 2003, pp. 209 – 232. Реферат 1063.01012

Бюро генеральной регистрации было учреждено в 1837 г. для наблюдения за статистикой движения населения в Англии и Уэльсе. До 1879 г. научным руководителем был Фарр. Автор описывает трудности в работе Бюро и особенно неизбежные упрощения данных даже до 1911 г. Сложность была *введена заново* в 1930-е годы с применением элементов теории корреляции.

В 1858 г. Бюро с частичным успехом начало применять печатающее устройство разностной машины Беббеджа, в 1870 г. оно приобрело арифмометр, а после 1890 г. в употребление вошли табуляторы Хиллерита.

Hochkirchen Th., Wahrscheinlichkeitsrechnung im Spannungsfeld von Maß- und Häufigkeitstheorie – Leben und Werk des *Deutschen* Mathematikers Erhard Tornier, 1894 – 1982. *N. T. M.*, Bd. 6, 1998, pp. 22 – 41. Реферат 1064.01535

Автор описывает жизнь и труды Торнье и считает его математику *связующим звеном* между аксиоматической и частотной теории вероятностей. Его труды продолжались только десять лет (1929 – 1939), после чего его отправили на пенсию ввиду недостойного поведения (видимо вызванного психологическими причинами). Позднее (когда именно?) Торнье переписывался с Хильдой Гейрингер, ассистентом, женой и вдовой Мизеса, и оказал влияние на подготовленное ей посмертное издание трудов Мизеса (1964).

С 1932 г. Торнье был членом национал-социалистической партии Германии, приложил руку к изгнанию Феллера из Кильского университета (1933), а в 1936 г. противопоставлял *приемлемые* теории с *еврейско-либеральным затуманиванием*. Хинчин (1961, посмертно) полагал, что Торнье, частично отказавшись от нерегулярности коллектива по Мизесу, спас частотную теорию, которая всё же осталась нецелесообразной по сравнению с аксиоматической теорией.

Позднейшая вставка. В предисловии к изданию трудов Мизеса Гейрингер упомянула оживлённую переписку с Торнье и выразила ему благодарность.

Hoeffding W., *Collected Works*. Редакторы N. I. Fisher, P. K. Sen. New York, 1994. Реферат 807.01034

Автор родился в Петербурге и учился в Берлине, но с 1945 г. жил в США. Собрание его трудов содержит 51 сочинений и рецензий на них. Полный список его сочинений не приложен, но кроме литографированного отчёта 1963 г., который упомянут на с. 53, нет никаких ссылок самогО автора или его рецензентов на иные его сочинения. Включены три немецкие статьи (1940 – 1942) в переводе на английский, пять статей из *Enc. Stat. Sciences*, шесть рецензий автора и его автобиография (1982).

Howie D., *Interpreting Probabilities. Controversies and Developments in the Early Twentieth Century*. Cambridge, 2002. Реферат 1031.01012

Основной темой автора (который употребляет малоизвестные слова) является бейесовский подход в статистике. Он описывает труды и мнения Фишера и Джеффриса, знакомит с неопубликованными материалами о последнем и обращает внимание на приложение теории вероятностей к физике и биологии и к общенаучным понятиям (простота законов

природы). Нет никаких определений основных понятий (обращённой вероятности, принципа недостаточных оснований), но введена эффективная оценка, притом неверно (с. 66). Автор забыл, что Ляпунов доказал центральную предельную теорему (с. 216) и не знает (с. 219), что диалектический материализм признаёт связь необходимости и случайности.

Предварительная история теории вероятностей (начальная глава) совершенно негодна. Некоторые из замеченных нами 15 ошибок относятся к нашим классикам (Граунт, с. 15; Муавр, с. 20; Пуассон, с. 20, который будто бы *халтурил* с вычислениями, с. 29). Ньютон (с. 27 и 200) считал, что система мира устойчива, на самом же деле заявил, что она время от времени нуждается в божественном регулировании. Некоторые ссылки не документированы (с. 32), а Мендель назван чешским монахом. Он был немцем, и в 1945 г. потомки его родственников были изгнаны из Чехословакии (устное сообщение W. Mann, внука племянника Менделя).

Hyksová Magdalena, Origins of axiomatic probability theory in Bohemia. В книге *Wanderings through Mathematics. Proc. Meeting on the History of Math*. Rummelsberg near Nurmberg, May 2005. Редакторы Hyksová Magdalena и др. *Algorismus*, vol. 53, 2006, pp. 136 – 146. Реферат 1113.01017

До 1918 г. Богемией называлась территория, ныне составляющая Чехию, но автор применяет это название по отношению к событиям до 1940 г. Она обсуждает труды тамошних учёных в прежние времена (в 1830-е годы – работы Больцано) и обращает особое внимание на двух забытых математиков, Karel Rychlik (1886 – 1968) и Otomar Pankratz (1903 – 1976), но упускает Хостинского, поскольку ему следовало посвятить отдельную статью.

Чубер преподавал в Брно до 1891 г., но он рассмотрен поверхностно, а несколько других математиков (например, Emil Schoenbaum) только названы. Больцано был также богословом и пытался защитить библейские утверждения стохастическими доводами (что Марков считал невозможным) и относил теорию вероятностей к логике. Его труды продолжил, в частности, *Венский* (философский) *кружок* (1922 – примерно 1939).

В 1844 г. знаменитый Христиан Допплер опубликовал раздел о теории вероятностей в своём математическом университетском учебнике, а в 1870 г. – в учебнике для гимназий.

Rychlik был возможно первым, кто последовал за аксиоматической теорией вероятностей Колмогорова, но он также изучал частотную теорию Мизеса и понятие нерегулярности последовательностей. Pankratz оставил

интересное обсуждение теории вероятностей и некоторых общих математических понятий, но его труды были опубликованы только на чешском языке.

Ineichen R., Zufall und Wahrscheinlichkeit – einst ganz getrennt, jetzt eng verbunden. *Elem. math*., Bd. 54, No. 1, 1999, pp. 1 – 14. Реферат 0940.60008

Автор обсуждает раннюю историю азартных игр (включая задачу на раздел ставки) и замечает, что понятие вероятности было введено после ожидания. Он защищает тезис, сформулированный в заглавии статьи (Случай и вероятность – когда-то полностью отделённые друг от друга, ныне же тесно связанные) и полагает, что Якоб Бернулли был первым крупным учёным, который соединил случайность и вероятность. Однако, Аристотель полагал, что случайное событие имеет логическую или субъективную вероятность, меньшую 1/2, а Законы Ману в древней Индии и Талмуд фактически понимают случайное событие как имеющее низкую вероятность, см. нашу статью в *Annals of sci*., vol. 55, 1988, pp. 185 – 198. Но только Якоб Бернулли действительно придал вероятности числовую меру.

Позднейшая вставка. Я. Б. рассматривал и неаддитивные вероятности.

Ineichen R., Chancen in Zahlenlotto – die frühesten Berechnungen. *Mitt. Dtsch Math.-Ver*., 2000, No. 2, pp. 12 – 13.
Реферат *Math. Rev*., 2001f 01027

Автор обсуждает классическую генуэзскую лотерею Хуаном Карамуэлем и Лобковицем (1670). Тот верно вычислил вероятность (без формального введения этого понятия) того, что игрок отгадает несколько номеров из ста в любой или в заданной последовательности. Он ссылается на свои прежние статьи и замечает, что Карамуэль не смог решить более трудные близкие задачи. В одной из тех статей (*NTM*, Bd. 7, 1999, pp. 21 – 30) автор обсуждал все стохастические результаты Карамуэля, включая и те, которые он сейчас рассматривает.

Ineichen R., *Es ist wie bei den Spielen*. Nicole Oresme und sein Beitrag in der Vorgeschichte der Stochastik. *NTM*, Bd. 9, No. 3, 2001, pp. 137 – 151. Реферат 1010.01010

Автор обсуждает сочинения Орема *De proportionibus proportionum* и *Ad pauca respicientes* (латинско-английское издание, редактор E. Grant. Madison – London, 1966) и разъясняет его понятие соизмеримости и применение *rations* (не величин, а отношений), что привело его к введению положительных дробных показателей степеней. Автор приписывает Орему

понимание вероятности и в гносеологическом смысле, и в связи со случайностью, равно как и введение шкалы вероятностей.

Уже Талмуд указывал соотношение запрещённой и разрешённой пищи в смесях, т. е. соответствующие числовые вероятности, а шкалы логической или субъективной вероятности встречались у Аристотеля.

Ineichen R., Die ersten kombinatorischen Untersuchungen zum Zahlenlotto. Die Beiträge von Caramuel und Frenicle de Bessy. В книге Seising R. и др., редакторы. *Form, Number, Order. Festschrift for Ivo Schneider*. Stuttgart, 2004, pp. 257 – 267. Реферат 1072.01009

Описан труд Карамуэля (1606 – 1682), опубликованный в 1670 г. и посмертная публикация de Bessy (1605 – 1675). Вот основная задача Карамуэля. Из натуральных чисел 1, 2, …, *p* отбираются пятёрки различных чисел. Сколько таких пятёрок потребуется, чтобы в одной из них появились два данных различных натуральных чисел, меньших *p*?

de Bessy сравнил теоретически возможный выигрыш участника лотереи, благоприятной для банкомёта, с соотношением благоприятных и неблагоприятных случаев в этой лотерее. Автор частично повторил свою прежнюю статью в *NTM*, Bd. 7, 1999, с. 21 – 30.

Ineichen R., The contribution of Leonhard Euler to actuarial mathematics. В книге *Euler Reconsidered. Tercentenary Essays*. Heber City. UT, 2007, pp. 102 – 118. Реферат 1137.01013

Автор кратко обозрел математическое обоснование страхования, построенное швейцарскими учёными, однако мемуар Даниила Бернулли 1768 г. о продолжительности браков не упомянут, а имея в виду жизнь и труды Эйлера, было бы уместно сообщить об идеях Лейбница о государственном страховании, хоть и не связанных с математикой (опубликовано в 1871 г.).

Автор разумно рассматривает свою тему на языке современных актуариев, но не комментирует близкой темы, роли Эйлера в развитии статистики населения. Мы это как раз и рассматривали в статье, опубликованной в том же сборнике (с. 281 – 316) о работах Эйлера по теории вероятностей, обработке наблюдений, статистике и страхованию жизни. Последнюю тему мы обсуждали на менее конкретном уровне.

Автор описал все пять основных сочинений Эйлера по своей теме (1767 – 1785), собранных в томе 7 первой серии его *Opera omnia* (Лейпциг, 1923), но не комментировал его работу о тонтинах, впервые опубликованную в том же томе. Эйлер изучал

важные проблемы страхования жизни (страхование отдельного лица, супругов, групповое в тонтинах, страхование в пользу наследников). Автор согласен с Du Pasquier (1910) в том, что Эйлер способствовал восприятию страхования в обществе и построил его крепкое математическое обоснование, и здесь показав себя мастером понятного описания проблем и их решения.

Роль Эйлера в подготовке второго (а не первого!) издания *Божественного порядка* Зюссмильха описана недостаточно, и его вывод (не оригинальный) о том, что население возрастает в геометрической пропорции, не подчёркнут. Этот вывод подхватил Мальтус, а в 1925 г. – Лотка (с надлежащими ограничениями).

Jongmans F., Seneta E., The Bienaymé family history from archival materials and [the] background to the turning-point test. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, t. 62, No. 3, 1993, pp. 121 – 143.
Реферат 0792.01023

Продолжая свою прежнюю работу, в которой участвовал и Б. Брю (*Intern. stat. rev*., vol. 60, No. 2, 1992, pp. 177 – 183) и исходя из дополнительных архивных источников, авторы описывают жизнь Бьенеме, его родственников, предков и потомков. Они обнаружили неизвестную заметку Бьенеме о численном решении уравнений Стевином и утверждают, что Бьенеме существенно помог Сильвестру познакомиться с другими французскими математиками. Они также обсуждают turning-point test (проверку независимости и одинакового распределения случайных величин), описывают труды Лиагра и Бертрана и попытались воспроизвести одно неопубликованное доказательство Бьенеме.

Jongmans F., Seneta E., A probabilistic *new principle* of the 19th century. *Arch. hist. ex. sci*., vol. 47, N. 1, 1994, pp. 93 – 102.
Реферат 0802.01003

Новый принцип это теорема Каталана (1877): неизвестные изменения причин случайного события не изменяет его (субъективной!) вероятности. Авторы обсуждают соответствующие статьи Каталана 1841 и 1877 г. и его позднейшую работу 1886 г., в которой он уточнил свою теорему, обнаруживают её связь с урновыми проблемами Пуассона (1837) и трудами других французских математиков и показывают, что обобщение задачи Каталана приводит к мартингалу. Они также описывают неопубликованное письмо 1878 г. Бьенеме Каталану, в котором содержалась фраза:

Помимо математических рассуждений всё в мире только вероятности или даже предположения.

Kallianpur G., Random reflections. В книге Ghosh J. K., редактор, *Glimpses of India's Statistical Heritage*. New Delhi, 1993, pp. 47 – 66. Реферат 0829.01020

Это – научная автобиография со списком трудов, но вот год рождения не был указан. Автор окончил университет Северной Каролины (одним из его учителей был Хотеллинг), работал в Беркли и Принстоне и вернулся в Индию в 1953 г. Там работал в Индийском статистическом институте (ИСИ), был его директором в 1976 – 1978 гг., а в 1979 г. вернулся в альма-матер.

Автор приводит сведения о нескольких учёных. Махаланобис установил в ИСИ либеральную атмосферу, но его *самодержавное управление* привело к *контролируемому хаосу*; как физик, его *раздражал* (высокий) *уровень строгости и абстракции* в математике. Эйнштейн примерно в 1948 г. был серьёзно заинтересован в сведениях о новых успехах теории вероятностей, а Винер, перед которым автор был *в большом научном долгу*, утверждал, что являлся потомком Маймонида.

Kalman R. E., Probability and science. *Niew arch. Wiskd*, IV. Ser.11, No. 1, 1993, pp. 51 – 66. Реферат 0785.01033

Не-математическая лекция. Автор утверждает, что за последние несколько десятилетий приложения теории вероятностей к проблемам реального мира были слишком абстрактными и что не было взаимодействия между понятиями вероятности и хаоса, рассматриваемого в научной литературе. Случайность он определяет как отсутствие полной однозначности в данных, и соответственно полагает, что $\sqrt{2}$ это *случайное число*. Мемуар Даниила Бернулли о мужских и женских рождениях, фактически опубликованного в 1770 – 1771 гг., он относит примерно к 1730 г.

Позднейшая вставка. Современная логика (а потому и математика) не признаёт отрицательных определений.

Kassler Jamie C., The emergence of probability reconsidered. *Arch intern. hist. sci.*, vol. 36, No. 116, 1986, pp. 17 – 44. Реферат 0658.01005

Автор описывает происхождение стохастических идей в астрономии. Рассматривая соизмеримость и несоизмеримость движений небесных тел, Орем (XIV в.), приводит в пользу первого *свидетельства мудрых людей*, а в пользу второго – его более высокую вероятность.

В связи с этой темой автор обращает внимание на правила сочинения музыки и подчёркивает их зависимость от комбинаторной стороны механической философии Декарта. С

началом XIV в. музыка перестала считаться с ограничениями, наложенными пифагорейской теорией. Таков, по мнению автора, был сдвиг от порядка к несовершенному порядку, который она полагает схожим со случайностью. Теоретики музыки изучали искусство комбинаций (Мерсен, 1623), а случайное составление мелодий началось в 1670-е годы.

Khan L., Mathematics and actuarial science – past, present and the future. *Ganita-Bharati*, vol. 24, No. 1 – 4, 2002, pp. 122 – 133. Реферат 1108.01318

Этот обзор в основном освещает события в Англии и Индии. Автор полагает, что термин *актуарий* (но не в прежнем смысле *клерк* или *нотариус*) появился в 1762 г. и связывает это с Джеймсом Додсоном. Он упоминает появление в Лондоне Института актуариев в 1848 г. и Актуарийного общества Индии (дата не указана) и описывает обязанности актуариев в прошлом. В 1848 г. актуарийная наука означала приложение теории вероятностей к *житейским проблемам*, особенно к страхованию жизни, и *ко всем финансовым проблемам*, связанным с вероятностью.

Автор обсуждает и нынешнее положение (обучение актуариев, содержание математики финансов, иные области страхования, теория риска) и цитирует лозунг: *Актуарии придают финансовый смысл будущему*.

Стиль автора неважен, а библиография негодна. Так, многие ссылки в тексте в ней не документированы.

Klep P. M. M., Stamhuis Ida H., The stubbornness of various ways of knowledge was not typically Dutch: the statistical mind in a pre-statistical era. *Centaurus*, vol. 46, 2004, pp. 287 – 317. Реферат 1062.01010

Это обзор книги *The Statistical Mind in a Pre-Statistical Era. The Netherlands 1750 – 1850*. Амстердам, 2002, редакторами которой они были. Они включили (видимо, все) 12 статей из этого источника в свою ценную библиографию. Они же (отдельно друг от друга) были авторами пяти из этих статей.

Основное утверждение авторов состоит в том, что в Нидерландах государствоведение и политическая арифметика развивались независимо друг от друга, потому что они относились соответственно к гуманитарным наукам (которые обычно понимаются как литература, история и философия) и иным наукам. Однако, государствоведение собирало сведения и о метеорологических и географических чертах государств, так что граница между этими двумя отраслями знания скорее состояла в отличии отношения к количественному описанию государства.

Авторы попытались присоединить измерения к статистике, но не упомянули триангуляцию страны (которую Гаусс исследовал в 1828 г.). Обзор содержит малоизвестные сведения о Rehuel Lobatto (1797 – 1866) и Simon Vissering (1818 – 1888), ведущих (в Нидерландах) представителей математического и качественного направлений в статистике соответственно; о сборе и публикации неофициальных и официальных статистических данных; и о влиянии других наций и Кетле на статистику в стране.

Обзор искажён ошибками и непонятными утверждениями: таблица Галлея была опубликована в XVIII в.; *чем меньше нормальная кривая, тем выше точность*; *моральная статистика или теория вероятностей*, – утверждение, приписанное *французам* и не комментированное; и, поразительно, *среднее и вероятность были разработаны* [между 1750 и 1850 гг. в Нидерландах].

Krengel U., Von der Bestimmung von Planetenbahnen zur modernen Statistik. *Math. Semesterber*., Bd. 53, No. 1, 2006, pp. 1 – 16. Реферат 1101.01008

Это очерк о решающей роли Гаусса в открытии и развитии метода наименьших квадратов (МНКв) с кратким описанием последующих событий от Лапласа до современных открытий. Автор не ссылается на наши гораздо более подробные статьи (*Hist. Scientiarum*, vol. 8, 1999, pp. 249 – 264 и *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, Bd. 219, 1999, pp. 458 – 467).

Сомнительно, что Гаусс ознакомился с выводом нормального распределения у Муавра, а Лаплас вовсе не доказал строго (нескольких вариантов) центральной предельной теоремы. Наконец, автор ссылается на Стиглера, но обходит молчанием его отвратительное обвинение Гаусса, который будто бы *выпрашивал у друзей неохотные свидетельства* о том, что он рассказывал им о МНКв, см. его *History of Statistics*. Cambridge, MA, 1986 (а не 1981!), с. 145.

Kreith K., Euclide turns to probability. *Intern. J. Math. Educ. Sci. Techn*., vol. 20, 1989, pp. 345 – 351. Реферат 691.01001

Автор пытается показать, как Евклид мог бы построить элементы теории вероятностей, хотя и не упоминая предельных закономерностей. Предполагая, что эта теория могла основываться на аксиоматическом методе, автор указывает, что трудность состояла бы в определении независимых событий. Он полагает, что Евклид мог бы ввести не-независимость вместо зависимости для произведения вероятностей событий A и B: это произведение было бы больше или меньше вероятности AB. Такой подход, как замечает автор, был бы схож с формулировкой

постулата о параллельных: Евклид обсуждал не параллельность, а не-параллельность.

Kunert J., Montag Astrid, Pöhlman S., The quincunx: history and mathematics. *Stat. Papers*, vol. 42, No. 2, 2001, pp. 143 – 169. Реферат 0986. 01015

Расположение пяти объектов, 4 из них в вершинах квадрата или прямоугольника, и 1 – в центре этой фигуры, называется quincunx. Гальтон изобрёл простой прибор, который так и назвал. Дробинки, проходя через ряды его иголок, собирались на его дне в куче, напоминающей нормальную кривую.

Авторы описывают труды Гальтона того времени; настаивают, что quincunx был его естественнонаучным подходом к центральной предельной теореме (ЦПТ); описывают обобщения прибора (сам Гальтон и Карл Пирсон в 1895 г.); и разъясняют соответствующее математическое обоснование. Они не указывают, что тогдашние условия ЦПТ были менее ограничительны, чем полагал Гальтон (с. 149), а их выражение (с. 159) *процент шариков … стремится к бесконечности* неудачно. Неверно, что Гальтон изобрёл опознание человека по отпечаткам пальцев: у него были предшественники (Fingerprints, *New Enc. Brit*. 15-е издание, vol. 4).

MacKenzie D. A., Arthur Black, a forgotten pioneer of mathematical statistics. *Biometrika*, vol. 64, No. 3, 1977, pp. 613 – 616. РЖМат, 6А21 (1977)

Независимо от группы английских учёных, основавших биометрическую школу (Ф. Гальтон, К. Пирсон и др.), Блек (1851 – 1893) поставил своей целью создать количественную теорию эволюции. Он не успел ничего опубликовать, но в его сохранившихся рукописях имеются исследование полиномиального распределения и независимый вывод распределения Пуассона. Рукопись основного сочинения Блека *Алгебра эволюции животных* (*Algebra of Animal Evolution*) утеряна, но содержавшаяся в ней задача об оценке одного многомерного интеграла опубликована в 1898 г.

Martin T., La valeur objective du calcul des probabilités selon Cournot. *Math, inf. sci. hum.*, No. 127, 1994, pp. 5 – 17. Реферат 821.01015

В теории вероятностей Курно автор обращает особое внимание на принцип пренебрегаемой вероятности. На самом деле принцип

моральной достоверности, т. е. пренебрегаемой вероятности противоположного события, ввёл Декарт в 1644 г., далее авторы Пор-Рояля в 1662 г. и Якоб Бернулли в 1713 г., а в 1777 г. Бюффон в качестве пренебрегаемой вероятности предложил 1/10 000.

Martin T., Probabilités et philosophie des mathématiques chez Cournot. *Rev. hist. math.*, t. 1, No. 1, 1995, pp. 111 – 138. Реферат 0822.01002

Автор подчёркивает, что Курно, как Пуассон несколько раньше, различал субъективную и объективную вероятности и тем самым будто бы перенёс теорию вероятностей в сферу чистой науки, хоть и *не преобразовал её основательно*. На самом деле эта теория оставалась прикладной наукой до начала XX в., когда её объектами стали плотности распределения и характеристические функции.

Автор также обсуждает мысли Курно об отношении математики к реальности и к теории познания. Курно оказался здесь ближе Энгельса к современности, потому что тот определил математику как науку о выражении природы в количественной мере и геометрических формах. Частично близка автору статья L. Daston, *Hist. Math.*, vol. 21, No. 3, 1994, pp. 330 – 344.

Langdon S. G., Some combinatorics in Jacob Bernoulli's *Ars Conjectandi*. Редакторы Bradley R. E. и др., *Euler at 300. An Appreciation*. Washington DC, 2007. The Math. Assoc. Amer. Spectrum. The MAA Tercentary Euler Celebration 5, pp. 191 – 202. (Это описание непонятно.) Реферат 1161.01012

Автор обсуждает часть 2 *Искусства предположений* (ИП), 1713, т. е. элементарную теорию размещений и комбинаций, формулу для суммы коэффициентов и появление *чисел Бернулли*. Этот термин ввёл Муавр в 1730 г., что по крайней мере в 1899 г. заметил Хаусснер, редактор немецкого издания ИП, но автор приписал этот термин гораздо более позднему времени. Обозначения типа con3nation для комбинации трёх элементов ввели Мерсен и Лейбниц, а не Я. Б., как полагает автор.

Автор предложил *по меньшей мере весьма правдоподобную* реконструкцию отсутствовавшего у Я. Б. доказательства формулы Я. Б. для суммы натуральных степеней чисел. В то время подобное доказательство, основанное на изучении последовательных разностей коэффициентов, было возможно, но только в принципе. Автор заметил, что Я. Б. не вывел достаточного числа частных случаев искомой формулы.

Аналогично, он не верит, что Я. Б, доказал сложную формулу для чисел Бернулли.

Автор ошибочно считает, что Николай Бернулли отредактировал ИП, что четвёртая часть сочинения содержит приложения теории вероятностей и что эта часть противоречит *Пор-Роялю*, а не весьма благоприятно отзывается о нём. Наконец, он упоминает антинаучный перевод ИП специалистом по древним языкам (E. D. Sylla), см. нашу рецензию в этолм сбонике. Мы сами перевели часть 4 ИП:
J. Bernoulli, *On the Law of Large Numbers*. Берлин, 2005.

Laplace P. S., *Philosophical Essay on Probabilities*. Перевод A. I. Dale с пятого франц. издания 1825 г. Berlin, 1995.
Реферат 810.01015

Помимо собственно перевода (с указанием изменений между первым и пятым франц. изданиями) в книге содержатся обширные комментарии (с выдержками из немецкого перевода 1932 г. и перепечатки 1986 г. франц. перевода) и словарик, не лишённый недостатков. Да, Тихо был величайшим наблюдателем в эпоху до телескопов, но следовало добавить: без него не было бы законов Кеплера. Термины *триангуляция* и *повторительный теодолит* доказывают, что Дейл ничего не понимает в геодезии.

Некоторые слова в переводе вряд ли приемлемы (устаревшее *whither* на с. 1 и *ad-hoceries* от *ad-hoc* на с. 121).

Комментарии полезны, но не всегда доведены до современности (Петербургский парадокс, урновая модель Даниила Бернулли – Лапласа – Эренфестов). Библиография часто ограничена первыми изданиями книг (так, ни последующие издания, ни переводы *Искусства предположений* не упомянуты. Недопустимое чистоплюйство!), есть ошибки и неточности (дата публикации заметки Арбутнота 1712, а не 1710; собрание сочинений Уильяма Гершеля было опубликовано *в двух томах*).

Многие десятилетия, быть может с 1850 по 1930 гг., *Опыт* был забыт, потому что читатели обратились к богатому идеями, но легкомысленному Кетле. Больцман ссылался на многих учёных, но не на Лапласа, а Максвелл дважды вежливо сослался на него. Перевод позволит увидеть теорию вероятностей в её историческом развитии и очень полезен.

Leti G., The birth of statistics and the origins of the new natural science. *Metron*, t. 58, No. 3 – 4, 2000, pp. 185 – 211.
Реферат 0996.01500

Автор набрасывает историю статистики до XIX в. Он полагает, что те же самые причины обусловили и её появление, и возникновение современного естествознания, отмечает приоритет Вобана (1686), который предложил провести национальную перепись, и описывает предысторию государствоведения (Италия, XVI и начало XVII века). Объединение двух ветвей статистики он косвенно относит примерно к 1800 г. (на самом деле, оно произошло на много десятилетий позже), а работа Лейбница по политической арифметике упущена.

Роль Вобана в общем развитии статистики сильно преувеличена, однако его выборочное обследование продукции сельского хозяйства Франции забыто.

Levy Ph., Charles Spearman's contributions to test theory. *Brit. J. Math. Stat. Psychol.*, vol. 48, No. 2, 1995, pp. 221 – 235. Реферат 921.01036

Автор исследует сочинения Спирмена (1904 – 1913) об исправлении корреляции за ошибки измерения, но его немецкая статья в соавторстве (*Z. Psychol*., Bd. 44, 1906) не упомянута. Автор также обсуждает критику Спирмена Пирсоном и другими и описывает современную положительную оценку трудов Спирмена, которые были важны и в истории факторного анализа. Ранговую корреляцию он не упомянул.

Loveland J., Buffon, the certainty of sunrise and the probabilistic reductio ad absurdum. *Arch. hist. ex. sci*., vol. 55, No. 5, 2001, pp. 465 – 477. Реферат 978.01022

Автор обсуждает **1.** Классическую задачу о вероятности последующего восхода Солнца, которую решали Р. Прайс (1764) и особенно Бюффон (*Essai d'arithmétique morale,* 1777 [перепечатано в 1954 г.]), а также происхождение этой задачи (мысленный опыт, чувства невежды, который замечает повторяющееся явление, философские выводы о подобных явлениях и о восходах Солнца в частности) и упоминает многих учёных, в том числе Локка, Лейбница, Паскаля, Юма, Кадиллака. **2.** Предыдущую работу Бюффона. Он полагает, что его простые астрономические вычисления 1749 г. могли предоставить модель вычисления вероятности восхода. 3. Вероятность того, что Бюффон мог подготовить своё *Essai* намного раньше 1777 г. и весьма вероятно до 1764 г.

Мы заметим, что и вероятность восхода Солнца, и понятие геометрической вероятности, которая также обсуждалась в *Essai*, описал аноним (несомненно Бюффон) в заметке 1735 г. в *Histoire* Парижской академии наук за 1733 г. **4.** Различие формул Прайса, Бюффона и Лапласа.

Год публикации заметки Арбутнота указан неверно (1710 вместо 1712).

Magnello M. E., Victorian vital and mathematical statistics. *Brit. soc. hist. math. bull.*, vol. 21, No. 3, 2006, pp. 219 – 229.
Реферат 1111.01006

Это поверхностный обзор, описывающий труды Фарра. Чадвика, Фл. Найтингейл и Пирсона, а *vital статистика* понимается в широком смысле, т. е. включает медицинскую статистику. Не изучены предшествующие работы на Континенте (Кетле лишь затронут, ни усилия Пуассона ввести теорию вероятностей в медицину, ни результаты Гаварре, Петтенкофера, Зейделя, Пирогова не упомянуты), опущены работы в естествознании (в метеорологии и астрономии, в которой изучение средних было продолжено исследованием плотностей, например, Пирсоном).

Даже события в Англии описаны недостаточно. Мысли Найтингейл о статистике больниц, утверждённые Международным статистическим конгрессом, забыты. Нет ни Гая, ни Сноу (который объяснил распространение холеры неочищенной питьевой водой), ни Симпсона (не Томаса Симпсона), который сравнил смертность от ампутаций с анестезией и без неё.

Ранний тип статистики не был *формой политической арифметики*, преступность следовало включить в моральную статистику, а не в статистику населения, а Мальтус не был статистиком.

В библиографии числится восемь работ автора, в основном о Пирсоне (чья подробная биография, составленная его сыном, упущена) и не указаны источники сведений об основных действующих лицах кроме Пирсона и Гальтона.

Malaguerra C., Stefano Franscini: From statistics to simple truths. *Proc. 51st session of the Intern. stat. inst*., 1997, pp. 71 – 74.
Реферат 914.01019

Автор описывает жизнь и труды Franscini (1796 – 1857), швейцарского педагога и в основном статистика. Он опубликовал несколько книг, организовал и провёл первую национальную перепись (1850) и способствовал развитию единой национальной общности. Работая в одиночку, не признанный в своей стране, он призывал к знанию посредством измерений и побудил общественность учредить федеральный университет.

Malhotra V. K., Some historical aspects of Indian official statistical system. *Ganita-Bharati*, vol. 24, No. 1 – 4, 2002, pp. 134 – 140. Реферат 1108.01301

Автор описывает историю статистики в Индии. Подробные данные о населении и (кустарной) промышленности были собраны в XVI в., но не позже, хотя историк Морленд косвенно оценил население в 1600 г. При Британской администрации статистические сведения собирались в провинциях и ежегодно публиковались в *Statistical abstracts*. Автор указывает, что они выходили в 1840 – 1865 гг., но затем называет 1868 – 1923 гг.

Первое централизованное статистическое учреждение возникло в 1895 г., ныне оно называется Central statistical organization. Подсчёты населения проводились в 1820 – 1830 гг., перепись части Индии произошла в 1865 г., а переписи всей страны, притом через каждые десять лет, начались в 1881 г. Основатель Индийского статистического института (1932) Махаланобис назван творцом существующей статистической системы.

Parmentier M., Concepts juridiques et probabilistes chez Leibniz. *Rev. hist. sci.*, t. 46, No. 4, 1993, pp. 439 – 485. Реферат 0804.01004

Автор соединяет философию индуктивного мышления и изучение юриспруденции у Лейбница с понятиями степеней доказательства и ожиданием и замечает, что первое не было полностью количественным. Так, свидетельства можно оценивать только качественно, Его знаменитое утверждение о том, что 1 – 1 + 1 – 1 + … = 1/2, т. е. равно среднему из 0 и 1, было метафизической оценкой. Его же рассуждение о некоторых моральных проблемах не противоречит последующему понятию морального ожидания. Автор не обсуждает ни историю неаддитивных вероятностей, ни отказа Лейбница признать закон больших чисел Якоба Бернулли.

Von Plato J., *Creating Modern Probability. Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective.* Cambridge, 1995. Реферат 0829.01012

Автор рассматривает теорию вероятностей с 1900 г. с упором на статистическую физику, квантовую теорию и переставляемость. В приложении описано как Орем понимал относительные частоты рациональных и иррациональных чисел. Использовано много источников, в том числе на шведском и русском языках, и некоторые архивные материалы.

История случайных процессов не описана подробно, теория хаоса не рассмотрена и нет объяснений для лиц, не являющихся физиками. Но основной недостаток книги обусловлен поверхностным знанием автора классической теории вероятностей и молчаливым отказом от поисков перехода от старого к новому. Многие утверждения повторяются, много лингвистических ошибок, а предложения часто слишком кратки и обрывисты.

Проблема иглы Бюффона *1777 г.* (с. 5) на самом деле восходит к 1735 г.; в истории аксиоматики отсутствуют Буль и Ломницкий (с. 32); понятие истинного значения не устарело (с. 73). Его применяют, например, метрологи, которые определили его независимо от Фурье. Урновая модель Эренфестов (с. 92) впервые появилась у Даниила Бернулли, затем у Лапласа; Марков начал исследование цепей не в 1908, а в 1906 г. (с. 132 – 133), а сам термин *цепи Маркова* появился в 1926 г., а не в 1930-е годы; вероятность последующего восхода Солнца (с. 165) впервые исследовал Прайс в 1764 г.; ошибочное описание теоремы Пуассона Мизесом повторено без комментариев (с. 182); нормальные числа (с. 193) интуитивно ввёл Ламберт; история понятия переставляемости (с. 246) должна начинаться с Чупрова.

Автор не сослался на наши статьи о Ньютоне и Пуанкаре в *Arch. hist. ex. sci*., vol. 7, 1971, с. 217 – 243; vol. 42, 1991, с. 137 – 171.

IX

О. Б. Шейнин

Подробные рефераты нескольких книг

Bernoulli J. The *Art of Conjecturing* together with *Letter to a Friend on Sets in Court Tennis*. Перевод с введением и комментариями Edith Dudley Sylla. Baltimore, 2006.

Вопросы истории естествознания и техники
№ 1, 2007, с. 178 – 180

Якоб Бернулли умер в 1705 г. и его неоконченный труд *Искусство предположений* был опубликован в 1713 г. вместе с его же, написанным по-французски *Посланием к другу об игре в мяч*, в котором исследованы вероятности в игре, лишь частично зависящей от случая, и которое вряд ли представляет общий интерес. Странно, что заглавия этих сочинений не указаны на языках оригинала на обороте титульного листа.

Оба труда, равно как и вероятностная часть (латинского) *Дневника* Бернулли включены без переводов в одном из томов его собрания сочинений[1], который содержит и сопутствующие материалы. Всё *Искусство* (ИП) и *Послание* были вольно переведены на немецкий с интересными комментариями[2], а важнейшая часть (часть 4-я) ИП имеется и в русском переводе[3] Существует и французский перевод этой части[4], и мы сами перевели её на английский[5].

Часть 1-я ИП состоит из перепечатки трактата Гюйгенса 1657 г. с важным комментарием. 2-я часть посвящена комбинаторному анализу и именно в ней автор ввёл и применил *числа Бернулли*. В 3-й части он использовал этот анализ для исследования азартных игр (которое, ещё без применения комбинаторики, также явилось темой 1-й части). Эта 3-я часть недостаточно изучена; ранняя история азартных игр обычно связывается с другими учёными от Паскаля и Ферма до Муавра.

Часть 4-я, чьё заглавие обещало описать применение *предшествующего учения в гражданских, моральных и экономических делах*, ничего подобного не содержит. На самом деле в ней Я. Б. попытался создать исчисление вероятностных предположений и доказал (слабый) закон больших чисел (ЗБЧ; термин Пуассона). Там же мы находим его соображения о достоверности, вероятности и случайности, не вполне формальное и не использованное в дальнейшем *классическое* определение вероятности и определение *искусства предположений или стохастики* (с. 318 в рецензируемом переводе). Это –

Искусство возможно точнее измерять вероятности вещей затем, чтобы ... мы могли всегда выбирать или следовать тому,

что будет найдено лучшим, более удовлетворительным, спокойным и разумным.

При сочетании своих вероятностных предположений Я. Б. фактически пользовался теоремами сложения и умножения вероятностей, которые были притом неаддитивными. Так, в одном из примеров некоторое предположение и противоположное ему имели 2/3 и 3/4 достоверности соответственно. Подобные вероятности начали изучаться сравнительно недавно[6], сам же Я. Б. возможно имел в виду применять их при решении *гражданских ... дел.*

В случае большого числа наблюдений ЗБЧ обосновал статистические исследования, поскольку установил равноправие между теоретической и статистической вероятностями (между дедукцией и индукцией); последняя оказалась *состоятельной оценкой* первой. Действительно, Я. Б. пытался выяснить, не существует ли такая степень достоверности, которую наблюдения, будь они сколь угодно продолжены, не смогли бы никогда превысить. В таком случае

Следовало бы усомниться в нашей попытке определять числа случаев [т. е. теоретическую вероятность] *из опыта* (с. 328 – 329).

Не зная ещё неизвестной формулы Стирлинга и просмотрев возможность несколько усилить своё доказательство, Я. Б. не вывел достаточно эффективной формулы, и Пирсон[7] резко и несправедливо раскритиковал его.

ИП заканчивается необоснованным и молчаливым обсуждением обратной задачи: будь наблюдения продолжены *всю вечность*, мы вынуждены были бы признать

Даже в вещах, в высшей степени случайных, ... как бы некоторую необходимость и, скажу я, рок (с. 339).

Другими словами, Я. Б. заявил, что теоретическая вероятность определяет свою статистическую сестру. Муавр[8] утверждал аналогичное, и лишь Бейес чётко разглядел различие между обеими задачами и вычислил теоретическую вероятность по статистической. Поэтому мы полагаем, что, совместно с предельной теоремой Муавра, его мемуар 1764 г. с дополнением 1765 г. завершил построение первого варианта теории вероятностей.

Перевод близок к оригиналу и уделяет должное внимание терминологии, но математические рассуждения в нём часто ошибочны, сомнительны или непонятны. Трудные места (с. 329, 168 – 169 и 308) не разъяснены. В последних двух случаях неверный термин автора *логарифмическая* функция (вместо *показательной*) оставлен без изменения, также не исправлено бернуллиево *произведение случаев* (с. 324), – *числа* случаев, – зато (с. 169) *алгебраические* кривые стали *геометрическими*. На с. 208 появился *биномиальный корень* (одночлен бинома), а утверждение Я. Б. (с. 198) о том, что число звёзд *обычно полагается равным 1022* не комментировано. На самом деле мы видим их в несколько раз больше, а 1022 это число звёзд в каталоге Птолемея.

Обширная библиография не включает перепечаток наиболее важных источников (Монмор, Муавр, Бейес); в дурной традиции для некоторых мемуаров (Арбутнот, Бейес) указаны отчётные годы соответствующих журналов, а не даты публикации. Библиографические данные первого русского издания 4-й части ИП полностью вымышлены, что подорвало веру в научную добросовестность Силлы. Она также (правда, условно) повторила ошибочное утверждение о том, что это издание является переводом с (ещё не существовавшего!) французского перевода. Второе русское издание того же источника вообще не включено в Библиографию.

Введение, комментарий и примечания Силлы занимают около 160 страниц. Она описала историю семьи Я. Б., его жизнь, занятия логикой, религиозные взгляды и отношения с современниками, но, во-первых, веры в её добросовестности уже нет, и, во-вторых, не упоминается ни книга Арно и Николя[9], которая послужила нематематической основой для Я. Б., ни пробабилизм, – средневековое учение, считавшее мнение каждого теолога вероятным, и, стало быть, фактически признававшее неаддитивные вероятности.

Почти ничего не сказано ни о быстроте сходимости в формуле ЗБЧ, ни о его значении или дальнейшей истории, а многие факты (особенно касающиеся Муавра) ошибочны; гидродинамическая теорема Даниила Бернулли приписана Николаю Бернулли (с. ix). Доказательство ЗБЧ названо *математическим, но не научным* (с. 43), а его искусство предположений ненаучным (с. 109). И мы обязаны знать (с. 58), что ИП, совместно с предшествующими трудами, было частью *до-парадигмического период*а, тогда как Муавр *установил парадигму ... математической вероятности*. Сапоги почти всмятку!

Перевод обеспечивает лишь общее впечатление об *Искусстве предположений*, а Введение и комментарий Силлы в лучшем случае сомнительны. Она поистине подтвердила старую истину (И. А. Крылов): *Беда, коль пироги начнёт печи сапожник, а сапоги тачать – пирожник.*

Эта рецензия является несколько переработанным вариантом первоначальной, опубликованной на английском языке в журнале *Historia Scientiarum*, vol. 16, No. 2, 2006. Рецензия появляется с любезного разрешения редактора указанного журнала.

1. *Bernoulli J.* Werke. Bd. 3. Basel, 1975. Herausgeber B. L. van der Waerden.

2. *Bernoulli J.* Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars Conjectandi) mit Brief an einen Freund über das Ballspiel (1899). Thun und Frankfurt am Main, 1999. Übers. R. Haussner.

3. *Бернулли Я.* О законе больших чисел. М., 1986. Перепечатка перевода 4-й части *Искусства предположений* 1913 г., выполненного Я. В. Успенским с Предисловием А. А. Маркова. Добавлены комментарии: О. Б. Шейнин, Якоб Бернулли и начало теории вероятностей; Ю. В. Прохоров, Закон больших чисел и оценки вероятностей больших уклонений; А. П. Юшкевич, Биография Я. Бернулли.

4. *Bernoulli J.* Jacques Bernoulli & l'ars conjectandi. Paris, 1987. Латинско-французское издание. Перевод Lalande, редактор N. Meusnier.

5. *Bernoulli J.* On the law of large numbers. Berlin, 2005. Перевод О. Б. Шейнина 4-й части *Искусства предположений*.

6. *Koopman B. O.* The bases of probability// Bulletin American Mathematical Society. Vol. 46. 1940. Pp. 763 – 774.
7. *Pearson K.* James Bernoulli's theorem// Biometrika. Vol. 17. 1925. Pp. 201 – 210.
8. *De Moivre A.* Doctrine of chances (1718). Третье издание (1756): New York, 1967. [См. с. 251.]
9. *Арно А., Николь П.* Логика или искусство мыслить. М., 1991. Перевод с французского (1662).

Hacking I. *The Emergence of Probability. A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference. Второе издание.* Cambridge, 2006

Вопросы истории естествознания и техники
№ 2, 2008, с. 175 – 178

Книга является перепечаткой первого издания 1975 г. с дополнительным Введением (23 ненумерованные страницы), которое уже свидетельствует об общей эрудиции и хорошем слоге автора, но не содержит дополнительных сведений о философии теории вероятностей и неоправданно хвалит некоторых из упомянутых в нем авторов.

Автор описывает предысторию теории вероятностей, её рост с середины XVII в., развитие понятий статистической и субъективной вероятностей и метода индукции. Он подчёркивает, что выбранный им в заглавии термин *Emergence* (появление, возникновение) не равнозначен *истории*, но историей теории вероятностей ему всё равно пришлось заниматься, и поэтому следовало бы (тем более в книге философского направления) схематично обрисовать эту ветвь математики, выделить её этапы, перечислить её соответствующие цели и указать на её переход.

В приложении к отдельной математической дисциплине философия обсуждает основные принципы и определения, и теория вероятностей предоставляет ей для этого широчайшие возможности, которые автор плохо использовал.

Фундаментальным понятием для этой дисциплины является случайность, и поэтому изложение следовало начать не позднее, чем с Аристотеля, Хакинг же (с. 17) архикратко разъяснил его понимание вероятного (но не случайного) и заявил, что труды этого гения появились *слишком давно*. В середине XVIII в. Ламберт попытался формализовать понятие случайности и эвристически ввёл *нормальные числа*, а Муавр считал основной задачей своего *Учения о шансах* разграничение случайного и необходимого (предначертанного) с тем, чтобы, исходя из философии Ньютона, изучать свидетельства Божественной мудрости в природе. Далее, современную физику нельзя представить без понятия случайности, а определение конечных и бесконечных случайных числовых последовательностей остаётся коренной проблемой математики. Ни о чём этом в книге нет практически ничего.

Индукция включена в подзаголовок книги, но Леви бен Гершон, с которого начинается история математической

индукции (и который поэтому должен был рассуждать и об обычной индукции), забыт. Ничего не сказано о гипотезах, хоть Ньютон и обсуждал их (косвенно) в своих *Правилах философствования* (в кн. 3-й *Начал*), а Лаплас считал возможным вводить их с последующими исправлениями. Вообще творчество Лапласа затронуто в нескольких строках и крайне поверхностно.

Якоб Бернулли (почему-то названный Жаком) рассматривал свой закон больших чисел как доказательство равноценности индуктивного знания дедукции, но это философское утверждение не было известно автору. Этот же классик науки ошибочно назван (с. 144) последним учёным, рассматривавшим неаддитивные вероятности (к ним вернулись в 1940 г.[1]), а средневековое религиозное учение пробабилизма, которое полагало утверждение каждого теолога вероятным и потому фактически допускало подобные вероятности, в этой связи не упомянуто.

В современной математической энциклопедии[2] можно найти 14 статей, связанных с именем Бейеса. Ни без него, ни без его подхода к решению статистических задач мы не обходимся, и автор действительно неоднократно вспоминает о нём, но ничего не говорит ни о его отрицании Фишером, ни о последовавших жарких и явно философских дискуссиях, и Бейес остался второстепенной и малопонятной фигурой.

Обсуждается (и слишком высоко оценивается) знаменитое пари Паскаля, но аналогичные философские и моральные проблемы остались в стороне. Нет петербургского парадокса, нет жгучих схваток XVIII – XIX вв., связанных с крупнейшими и статистически обоснованными открытиями в медицине (оспопрививание, анестезия) и нет сведений о попытках теологов запретить их применение[3]. Почему-то подробно описывается страхование жизни, хотя и без упоминания сопутствующих моральных проблем.

Трудно согласиться с самоограничением автора *ранними идеями* (см. подзаголовок книги): ведь нельзя же, к примеру, изучать творчество Евклида без привлечения *современных* понятий. Однако, автор рассматривает субъективные вероятности, но умалчивает о том, что они могут появляться в экспертных оценках, обработка которых входит в цели математической статистики. А логически неприемлемое *классическое* определение вероятности (которое толком не обсуждается) должно было подвести изложение к теории Мизеса и к аксиоматизации теории вероятностей, но автор описывает эту тему кратко и поверхностно. Далее, качественная (в соответствии с характером древней науки) корреляция встречается даже у Гиппократа[4]:

Люди, очень полные по природе, склонны умирать в более раннем возрасте, нежели худощавые.

Следовало бы сказать и о ней, и, хотя бы кратко, о количественной корреляции (Гальтон, Пирсон).

Автор допустил несколько ошибок. Результаты Зюссмильха, чья таблица смертности применялась и в XIX в., будто бы мало

использовались (с. 113). Единственное математическое рассуждение (доказательство одного утверждения Граунта, с. 108) неверно, а вместо года публикации нескольких мемуаров указаны отчётные годы соответствующих журналов. В целом же, даже в 1975 г. книга никак не соответствовала своему заглавию, а её перепечатку можно назвать скандальной.

Подобающей общей литературы по философии теории вероятностей не существует, хотя можно было бы назвать нескольких авторов, внёсших свой вклад в эту тему. В России сама эта теория начала развиваться, можно сказать, с Буняковского и Чебышёва. Буняковский не считал возможным стохастически проверять правдивость библейских сказаний (против чего решительно возражал Марков), а Чебышёв по свидетельству В. Е. Прудникова[5] был настроен против философии математики. Марков, ученик Чебышёва, считал бесполезным изучать принципы теории вероятностей[6], и эта позиция проявилась в его *Исчислении вероятностей* вплоть до её последнего посмертного издания 1924 г. В до-аксиоматической теории вероятностей эти принципы действительно оставались неясными, но Марков добавил, что и в геометрии положение такое же, – и это несмотря на её аксиоматизацию Гильбертом (в самом конце XIX в.).

Упомянем и П. А. Некрасова, но лишь в отрицательном смысле. Примерно после 1900 г. его оригинальные труды по теории вероятностей стали совершенно непонятными, а прочие сочинения, посвящённые ей же, оказались неразрывно сплетёнными с религией и мелкой философией. Но вот в свои прежние годы, проверяя в 1896 г. студенческую диссертацию А. А. Чупрова о математических основаниях статистики, он указал, что

С точки зрения нашей Милль, Кант и т. д. не лучше, а хуже Аристотеля, Платона, Декарта, Лейбница[7].

Сам Чупров и тогда, и в 1909 г.[8] пытался (на наш взгляд – безуспешно) объединить статистику, философию и логику в некий единый статистический метод. Он опирался на труды двух немецких философов (В. Виндельбанд, Г. Риккерт), которых с тех пор никто никогда не упоминал ни в статистике, ни в теории вероятностей. Более поздние российские философские труды по теории вероятностей свелись, кажется, лишь к поверхностному противопоставлению материализма идеализму.

[1] *Koopman, B. O.* The bases of probability // Bulletin of the American Mathematical Society. 1940. Vol. 46. P. 763 – 774.

[2] *Прохоров, Ю. В.*, редактор. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. Москва: Большая российская энциклопедия, 1999.

[3] *White, A. D.* History of Warfare of Science with Theology. New York – London: Macmillan, 1900. Vols 1 – 2.

[4] *Hippocrates.* Aphorisms / Great Books of the Western World. Vol. 10. Chicago: Enc. Brit., 1952. P. 131 – 144. Aphorism No. 44.

[5] *Прудников, В. Е.* П. Л. Чебышёв – учёный и педагог. Москва: Просвещение, 1964. С. 91.

[6] *Марков, А. А.* Об основных положениях исчисления вероятностей и о законе больших чисел (1911) / *Ондар, Х. О.* О теории вероятностей и

математической статистике (Переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова). Москва: Наука, 1977. С. 162.

[7] *Шейнин, О. Б.* А. А. Чупров: Жизнь, творчество, переписка. Москва: Госкомстат СССР, 1990. С. 80. (Новое издание: Берлин, 2010.)

[8] *Чупров, А. А.* Очерки по теории статистики (1909). Москва: Госстатиздат, 1959.

Kendall M. G., Doig A. G., *Bibliography of Statistical Literature Pre-1940 with Supplements to the Volumes for 1940 – 1949 and 1950 – 1958*. Edinburgh, 1968. НКЗР А1969, № 10, с. 21 – 24

Книга является томом 3 библиографии, охватывающей период до 1958 г. Её первые два тома вышли в 1962 и 1965 гг. Цели и методические установки авторов описаны в предисловии к т. 1. Именно, в библиографию отбирались почти все статьи из 12 профилирующих журналов и ряд статей из 42 других журналов. Использовались также пристатейные библиографии и реферативные журналы (но не РЖ *Математика*). Авторы полагают, что охватили 95% существующей журнальной литературы по теории вероятностей и математической статистики, включая приложения.

Каждый том библиографии является только авторским указателем, разделение по предметному признаку отсутствует. Литература на русском и некоторых других языках описана на английском, немецком или французском языке и приводится табличка принятой транскрипции кириллицы. Выпуск дальнейших томов библиографии не предусмотрен, так как с 1959 г. начал выходить в свет реферативный журнал Международного статистического института *Statistical Theory and Methods Abstracts* (давно уже скончавшийся).

Всего в т. 3 приведены библиографические описания примерно 10 тысяч монографий и статей с разбивкой на два периода, до 1900 г. и с 1900 по 1939 гг. (2360 и 7630 наименований), а также дополнения к первым двум томам библиографии (148 и примерно 1170 наименований соответственно). Но все книги, описанные в этом томе, принадлежат периоду до 1900 г. Ни во второй раздел тома, ни в первые два тома библиографии книги не включались, пожалуй, по примеру упомянутого реферативного журнала. Это обстоятельство сильно обесценивает библиографию, которая всё же весьма полезна.

Том 3 интересен кроме того историку математики, так как в нём перечислены работы классиков науки (Лапласа, Гаусса и др.) и учёных, в творчестве которых теория вероятностей была второстепенной темой (Эйлер), подчас забытые работы крупных математиков, комментарии и обзоры, а также переводы различных сочинений на три европейских языка.

Есть и недостатки. **1.** Отобранная литература (даже XX в.) не была проверена de visu (воочию). **2.** Ни в одном разделе тома почти нет ссылок на собрания сочинений, возможно в связи с ориентированием на отражение журнальной литературы. Читатель должен искать подобные собрания как более доступные и удобные для чтения. **3.** Имеются ошибки и неточности в описаниях известных авторов и даже классиков. Для сочинения Зюссмильха *Божественный порядок* … указан год издания 1788, а издания 1741 и 1761 – 1762 гг. (с активным участием Эйлера) забыты. Не упомянута вторая часть мемуара Даниила Бернулли Mensura sortis …, в которой автор мог бы вывести интегральную предельную теорему. Наконец, из 14 сочинений Эйлера, вошедших в т. 7 первой серии его полного собрания сочинений и относящихся к теории вероятностей, в библиографию вошла только половина, а одно из его сочинений, отражённых в ней, либо не существует, либо названо неверно. **4.** Не достигнуто единообразия в написании фамилий авторов сочинений до и после 1900 г. Ранние сочинения Борткевича помещены под фамилией Bortkewich, а после 1900 г. он числится как von Bortkiewicz. Борткевич переехал из России в Германию и, будучи дворянином, стал так подписываться и оказался в конце алфавита. Авторам библиографии следовало бы отметить это. **5.** Отсутствуют перекрёстные ссылки.

По оценке авторов (1962 г) во всём мире по теории вероятностей и математической статистике ежегодно публикуется примерно тысяча статей, так что было бы целесообразно издать библиографию этой литературы за 1959 – 1970 гг. Ни реферативные журналы, ни сводные за ряд лет авторские указатели к ним не заменяют алфавитно-предметных библиографий, составленных, конечно, в первую очередь по реферативным журналам. И неплохо бы составить единую библиографию литературы за 1900 – 1970 гг. с обязательным включением книг в неё.

В 1968 г. исполнилось сто лет со дня рождения Борткевича, и мы добавим, что он опубликовал около ста работ, в том числе семь на русском языке (1899 – 1910). Одна из последних, *Теория вероятностей и борьба с крамолой*, с беспощадной критикой П. А. Некрасова была опубликована в эмигрантском журнале *Освобождение*, кн. 1. Штутгарт, 1903, с. 212 – 219, но, видимо, лишь в части тиража.

Lancaster H. O., *Bibliography of Statistical Bibliographies*. Edinburgh, 1968. НКЗР, А1968, № 9, с. 23 – 25

Книга написана по заказу Международного статистического института, и в ней отражена литература, изданная до 1965 – 1966 гг. Автор использовал профилирующую журнальную (в том числе реферативную) литературу, некоторые

общематематические журналы и публикации, а также генеральные библиографические источники типа Каталога Британского музея. Содержание книги шире её названия, что вполне оправдано: собственно библиографии занимают незначительную долю её объёма.

В гл. 1 выборочно перечислены книги и статьи, посвящённые 330 более известным учёным, в основном из числа упомянутых в фундаментальных сочинениях и библиографиях, либо тех, в честь которых были опубликованы юбилейные сборники или статьи. Например, 6 источников указано по Гауссу, 11 – по Лапласу и 3 – по Колмогорову. Упоминаются и существующие сборники учёных, в том числе классиков науки, работы которых либо оказали сильное влияние на развитие теории вероятностей и математической статистики (Дарвин), либо в основном лежали вне пределов этих дисциплин (Эйлер). Наконец, включены авторы сочинений по комбинаторному анализу.

В гл. 2 перечислено около тысячи источников – библиографий и обзоров, в основном за последние 10 – 15 лет. Национальные (но не международные) библиографии снабжены отдельным указателем. Эти источники включают литературу, относящуюся к приложениям теории вероятностей и математической статистики и к другим математическим дисциплинам (например, к теории групп, графам). Широта содержания отражена в обширном (12 страниц) предметном указателе к главе. Вот некоторые его основные рубрики: подверженность несчастным случаям; математический анализ; астрономия; канонические переменные. Автор разъясняет, что содержание этой главы покрывает те дисциплины математического цикла (включая приложения), *которые могут преподаваться на факультетах статистики и математической статистики университетов*.

В конце книги помещён авторский указатель к обеим главам. Общая оценка книги:

1. Она безусловно полезна специалистам по теории вероятностей и математической статистики, а гл. 1 также и историкам математики.

2. Пёстрое содержание гл. 2 особо не затруднит читателя, поскольку её объём не слишком велик.

3. Указатель национальных библиографий, к которому следовало бы присоединить разбросанные в той же гл. 2 международные библиографии, видимо, достаточно полон.

4. Довольно полно отражена советская литература, однако нет ссылок ни на реферативный журнал *Математика*, ни на другие справочные издания Института научной информации.

Книга заставляет задуматься о выпуске подобных изданий по математике в целом. Биобиблиография этой науки (хотя бы в

узком смысле, т. е. лишь перечней библиографий) могла бы быть составлена, быть может с участием зарубежных математиков.

Pearson E. S., Kendall M. G., *Studies in the History of Statistics and Probability*. London, 1970. НКЗР А1971, № 9, с. 21 – 24

В книге собрано 29 статей, опубликованных в разное время (1906 – 1968) главным образом в журнале *Biometrika*. Их можно разделить на три группы, относящиеся соответственно к предыстории предмета, к XVII – XIX вв., и, наконец, к биометрической школе.

В предисловии отмечено, что в биометрической школе интерес к истории своего предмета возник в связи с лекциями К. Пирсона по истории статистики, математической статистики и теории вероятностей. Эти неопубликованные лекции намечено издать (изданы в 1978 г.).

В первой группе мы отметим статьи F. N. David, *К истории азартных игр*; M. G. Kendall, *Начало исчисления вероятностей* и *Откуда следует начинать историю статистики* и A. M. Hasover, *Механизмы случайного выбора в иудейских религиозных книгах*. Дейвид полагает, что религиозные предрассудки тормозили зарождение теории вероятностей (попытка предсказания случайного события могла казаться кощунством). Таково же мнение Кендалла в его первой статье. Кендалл также замечает, что в XVI в. католическая церковь запрещала страхование жизни. Однако, учёные, которые во все времена старались познать законы природы, в XVIII в. применяли и вероятностные соображения. Хасовер отмечает применение жеребьёвки и в иудейской религии, и при разделе земли.

Во второй своей статье Кендалл утверждает, что политическая арифметика, включая страхование жизни, по существу началась в 1660 г. (т. е. от Граунта). Не отрицая его основополагающей роли, заметим, что выборочный статистический метод при оценке урожая был применён в 1648 г. (*Акты хозяйства боярина В. И. Морозова*, ч. 1. М. – Л., 1940, с. 100).

Во второй группе отметим статьи M. Greenwood, *Медицинская статистика от Граунта до Фарра* (подробное описание работ Граунта, Петти, Галлея, работ ряда английских статистиков до Фарра включительно, а также работ Н. Стрюйка, А. Депарсье и И. П. Зюссмильха), R. L. Plackett, *Принцип арифметической средины* (обработка астрономических наблюдений у Птолемея и Тихо Браге, работы Т. Симпсона и Лагранжа), A. R. Thatcher, *Замечание о ранних решениях задачи о продолжительности игры* (описание работ Муавра, Ник. Бернулли и П. Р. Монмора), E. Royston, *Замечание об истории графического представления статистических данных* (статистические диаграммы А. Ф.

Крома и У. Плейфера в конце XVIII – начале XIX вв.), Кендалла, *Т. Янг о совпадениях* (описание вывода распределения Пуассона с единичным параметром, 1819) и *История теории вероятностей И. Тодхантера* (краткая биография Тодхантера) и *Ф. И. Эджуорт*, H. L. Seal, *Историческое развитие линейной модели Гаусса*, нашу статью *Ранняя история закона больших чисел* и К. Пирсон, *Замечания к истории корреляции*.

Статьи Плакетта, Тетчера, Ройстон и вторая статья Кендалла очень кратки. Плакетт не раскрывает роли Симпсона в теории ошибок и совсем не упоминает Ламберта. В чётко написанной статье Тетчера недостаточно подробно освещены результаты Муавра. Тема статьи Ройстон слишком узка: не включена история табличного направления в государствоведении и не указано, что графическое представление статистических данных приводило к графикам эмпирических функций распределения (Гюйгенс, 1669).

В истории теории вероятностей Тодхантер известен так же хорошо, как Лаплас в самой теории. В заметке, написанной к столетию публикации сочинения Тодхантера, Кендалл отмечает значение и недостатки этого труда для современного читателя и перечисляет его другие работы. Интересна статья Кендалла о профессоре политэкономии Эджуорте (1845 – 1926), который одним из первых применил математику к экономике и опубликовал ряд работ по теории вероятностей, математической статистике и теории ошибок. Он был предшественником К. Пирсона и подготовил почву для распространения идей биометрической школы.

В статье Сийл дан широкий обзор результатов Гаусса, Коши, Бьенеме, Чебышева, Пирсона, Фишера и др. Сделаны интересные выводы, в том числе о причинах недостаточного использования теории ошибок основателями математической статистики. Но изложение следовало начать с XVIII в., когда при обработке измерений впервые стали широко применять линейные модели.

Статья К. Пирсона посвящена корреляции в теории ошибок и у Гальтона. Интересно его чёткое утверждение о различном понимании независимости в теории ошибок и математической статистике. Это лишь один из аспектов исторически сложившегося различия между этими дисциплинами. Отметим досадную ошибку Пирсона (с. 185): Гаусс основал теорию ошибок нормальным распределением в 1809, а не в 1823 – 1826 гг.

В книге перепечатаны мемуары Бейеса 1764 г. (и ссылка на его продолжение в 1765 г., которое на с. 133 почему-то приписано Р. Прайсу) и Даниила Бернулли с комментарием Эйлера 1778 г. о

теории ошибок. Прайс представил обе части посмертного мемуара к публикации и снабдил их обширным комментарием.

Бейес впервые применил бета-распределение. При записи его результата в предельном случае (Тимердинг, в немецком переводе мемуара) получается теорема, отличная от теоремы Муавра – Лапласа). Бейес видимо понимал практическую бесполезность последней для оценки вероятности события по его частоте.

Вторым после Ламберта Д. Б. предложил принцип наибольшего правдоподобия. При законе распределения в виде дуги параболы этот принцип привёл к возрастанию апостериорных весов наблюдений к краям вариационного ряда, что должно было считаться неожиданным. Впрочем, ослепший Эйлер неверно понял мемуар и предложил оценку, которая примерно совпадала с оценкой по методу наименьших квадратов.

К третьей группе статей относится ряд интересных публикаций по истории биометрической школы (подробные биографии ведущих учёных и характеристика их работ, преемственность идей).

Книга почти лишена справочного аппарата. Почти нет ссылок ни на позднейшую литературу, ни на не перепечатанные статьи из *Биометрики*. Но она несомненно интересна для историков математики и для специалистов по теории вероятностей и статистики.

Porter Th. M., *Karl Pearson. The Scientific Life in a Statistical Age*. Princeton and Oxford, 2004

Вопросы истории естествознания и техники
№ 2, 2007, 191 – 195

Карл Пирсон (1857 – 1936) родился 150 лет назад. Он был прикладным математиком и философом, но прежде всего со-основателем биометрики, основной ветви позднее оформившейся математической статистики.

В 1875 г. К. П. поступил в Кингс-колледж в Кембридже и в 1879 г. с отличием сдал экзамены по математике на степень бакалавра, но ещё в 1877 г. его увлекли религиозные поиски и он также начал изучать философию, особенно Спинозу и немецких авторов. До 1884 г. К. П. также проводил литературные, исторические и политические изыскания и воспринял науку как описание явлений. Портер (с. 64) полагает, что к этому махистскому выводу К. П. пришёл самостоятельно.

В 1880 г. К. П. начал считать себя социалистом, вскоре обменялся несколькими письмами с Марксом и даже захотел перевести *Капитал* (разумеется, 1-й том) на английский язык, однако автор отказался от его услуг. Пирсон стал изучать социальную и экономическую роль религии, в первую очередь в

средневековой Германии, и пришёл к мысли о чтении лекций по немецкой истории и литературе. В 1882 г. он действительно читал лекции в Кембридже по истории Германии в средневековье и в период Реформации и о роли науки и религии в обществе. Религию он определял как отношение конечного к бесконечному (Портер, с. 111).

Портер (с. 93) также назвал К. П. *врождённым историком*, сочинения которого были

Основаны на глубоких исследованиях и поразительно оригинальны. В тот период, – добавил Портер (с. 118), – *Пирсон был страшно занят самой захватывающей математической работой своей жизни*,

но он не сообщил ни её названия, ни соответствующей даты (возможно 1883 г.). Ничего подобного мы не нашли.

В 1884 г. К. П. стал профессором прикладной математики с лондонском Университетском колледже. Через год он основал *Клуб мужчин и женщин*, просуществовавший до 1889 г., в котором обсуждались все проблемы, касающиеся женщин, а также взаимоотношения между полами. Он полагал, что незамужние женщины могут вести свободный образ жизни и по крайней мере в Англии безразличное отношение к общению с проститутками перешло к моральному осуждению этого, что оказалось в основном заслугой *таких лиц, как Пирсон*[1].

Всё это время, примерно до 1893 г., К. П. деятельно занимался физикой и высказал исключительно интересные утверждения, которые Портер частично цитирует, но не связывает с современными представлениями. Так, во вселенной имеется *отрицательная материя*; *все атомы ... видимо, начали пульсировать в один и тот же момент*; тяготение обусловлено кривизной пространства. Римановых пространств он, однако, не упоминал, а кривизна пространства, как теперь считается, напротив, вызвана силами, действующими в нём.

В своей преподавательской деятельности К. П. широко применял в статике графические методы и, *как следствие* (Портер, с. 216), начал изучать те же методы в статистике, которую воспринял как общенаучный инструмент, соответствующий его мыслям о необходимости обеспечить студентам широкий кругозор.

В 1891 г., став профессором геометрии в лондонском Грешем-колледже, К. П. продолжал увлекаться теми же методами. Вскоре, однако, *обсуждения эволюции* (Портер, с. 237) с зоологом Уэлдоном, равно как и сочинения намного старшего их Гальтона, привлекли его внимании к биологии и особенно к евгенике, а потому и к изучению их статистическими средствами. В евгенике Пирсон отстаивал научный подход, полагая, что *природа мощнее воспитания*, и был сторонником государственного вмешательства в планирование семьи (Портер, с. 280 и 278).

Мы теперь самостоятельно опишем статистические заслуги Пирсона. В самом конце XIX в. К. П., Уэлдон и Гальтон основали биометрическую школу с целью статистически обосновать

естественный отбор. Уэлдон, однако, умер в 1906 г. и Пирсон оказался во главе новой школы и главным (многие годы единственным) редактором её прославленного журнала *Биометрика*. В 1901 г. редакционная статья в её первом выпуске заявила, что *проблема эволюции это статистическая проблема* и что, хотя в теории Дарвина отсутствовали математические понятия, каждая его идея

Сразу же представляется подходящей для математического определения и требует статистического исследования.

Много позже К. П[2]. назвал Дарвина

Нашим избавителем, тем, кто придал новое значение нашей жизни и миру, в котором мы обитаем.

Пирсон продвинул теорию корреляции, опубликовал большое число важных статистических таблиц, изучил ряд распределений (частично рекомендованных им самим) и оценку их параметров, но его важнейшей отдельной заслугой было введение критерия соответствия опытных данных той или иной кривой распределения. Несмотря на свои исторические изыскания, К. П. не вспоминал о Континентальном направлении статистики населения; заметим, что Кетле, самый влиятельный статистик XIX в., был глубоко верующим человеком и ни разу не сослался на Дарвина. Примером совершенно неверного мнения Пирсона[3] об истории своей науки является его утверждение о том, что закон больших чисел Бернулли слаб (это так), а потому негоден и притом сравним с ошибочной системой мира Птолемея. Странно, что эта его статья появилась в период, когда он читал лекции по истории статистики. В их посмертной публикации он[4] назвал себя неправым в том, что

Работал столько лет в области статистики и пренебрёг ее историей.

Начиная с 1877 г. собственно европейские статистики достигли больших успехов, а А. А. Чупров на протяжении многих лет (без существенных результатов) пытался объединить Европу с Англией. Слуцкий, в письме 1912 г.,[5] указал, что со временем труды Пирсона окажутся строго обоснованными.

Да, действительно, английские статистики применяли частость, но не теоретическую вероятность, и не отличали в своих сочинениях выборочных параметров от теоретических (возможно в какой-то степени ввиду пирсоновских махистских взглядов) и представления о логической структуре теории вероятностей оставались в Англии на уровне XVIII в.[6] Неудивительно, что европейские статистики относились к Пирсону с презрением.

Тем не менее, Пирсон, несмотря также на свой тяжёлый характер, проложил дорогу Р. А. Фишеру, который заложил основы современной математической статистики. Так,

Между 1892 и 1911 гг. он создал своё собственное царство математической статистики и биометрии, осуществляя в нем верховную власть и защищая его всё расширяющиеся границы от атак извне[7].

И вот Фишер, в письме 1946 г.[8], о нём же:

Он был особо невосприимчив к современным успехам в своей области и часто враждебен по отношению к ним. [*Иначе же*] *труды Эджуорта и Стьюдента* [Госсета], *если назвать только двоих, были бы востребованы раньше*.

Во всяком случае, Пирсон[9], примерно в 1914 г., написал Оскару Андерсону (ученику Чупрова, позднее ведущему немецкому статистику), что *Стьюдент не специалист*, – Стьюдент, который уже тогда опубликовал 5 статей в той же *Биометрике*!

Фишер[10] также выдвинул против Пирсона серьёзное обвинение: его утверждение в защиту сравнимости некоторых статистических методов было *лишь оправданием фальсификации этого сравнения*.

Существуют, однако, и свидетельства другого рода. Вот П. Ч. Махаланобис, 1893 – 1972, крупнейший индийский статистик[11]:

Я общался с ним [с Пирсоном] *всего лишь несколько месяцев, но всегда считал его своим учителем, а себя – одним из его скромных учеников*.

Или Ньюком, который никогда не был учеником Пирсона, в письме ему 1903 г.[12]:

Вы – единственный живущий автор, чьи труды я почти всегда читаю, если есть время и возможность достать их, и с которым я во время чтения провожу воображаемые беседы.

Пирсон[13] отвергал революции и упоминал Ленина в отрицательном смысле: Петроград

По какой-то непостижимой причине ныне назван по имени человека, который практически загубил его.

Поскольку Ленин[14] назвал Пирсона *добросовестным и честным врагом материализма* и *одним из самых последовательных и ясных махистов*, советские статистики относились к нему почти как к врагу народа. Вот пример вульгарнейшего утверждения[15]: система кривых Пирсона неприемлема, главным образом потому, что в её основе

Лежит фетишизм числа и ... классификация их построена только математически. Хотя Пирсон не так свирепо хочет подчинить весь реальный мир единой кривой распределения, как это делал Гаус [так в ее тексте], *... но его система покоится всё же только на математической основе, на которой вообще нельзя изучать реальный мир*.

Здесь также отчётливо видно, как советские статистики боялись количественных методов.

Для Портера (с. 309) Пирсон – почти трагическая фигура. Он основатель того, что *символизирует ... полнейшее обезличивание науки*, а вот *другой* Пирсон, сторонник *общности и мудрости*, забыт (с. 314). Мы сомневаемся в правомерности подобных противопоставлений, и во всяком случае трагичными в том или ином смысле были учёные и философы от Платона до Толстого и Дарвина и до Эйнштейна. Дарвин[16] верил в предстоящее международное братство рода человеческого, Эйнштейн отрицал случайность в микромире.

Библиография Портера не доведена до современности; не включены даже перепечатки 1991 г. *Грамматики науки* Пирсона. Многие важные сочинения в ней отсутствуют, зато там можно найти никчемные книги (Desrosières). Ссылки, приведённые в примечаниях (Фишер, Эйнштейн), не отражены в авторском указателе, даты первых публикаций переводных книг не сообщаются.

Портер составил свою книгу после *восьми лет исследований* и считает себя историком (с. 310 и 305), но нагромоздил столько подробностей, сквозь которые читателю придётся продираться, что ему следовало бы потратить ещё 8 дней и вычеркнуть половину, притом же он не указал, что Пирсон был избран в Королевское общество (1896) и получил приглашение от Ньюкома выступить с докладом о методологии науки на крайне престижном Международном конгрессе искусств и наук в Сент-Луисе (1904); приехать он не смог. Интересно, наконец, что Мах, в предисловии к своей книге[17] (к первому из тех изданий, которые вышли в свет после появления пирсоновской *Грамматики науки*), упомянул Пирсона:

Публикация [этого сочинения] *познакомила меня с исследователем, кантианские* (erkentnisskritischen) *воззрения которого во всех важных пунктах совпадают с моими и который умеет откровенно и мужественно противостоять вненаучным тенденциям в науке*.

И уже в 1916 г. та же *Грамматика науки* произвела сильное впечатление на Ю. Неймана, который прочёл её по рекомендации своего *учителя*, С. Н. Бернштейна, в Харьковском университете[18].

Далее, Портер допустил ошибочные и бессмысленные утверждения. Влиятельнейший трактат по натуральной философии У. Томсона и П. Г. Тейта назван *стандартным викторианским* (с. 199). Помимо прямых линий существуют *и другие кривые* (с. 259) и *даже математика* не может *доказать* четвёртого измерения (с. 37). И, конечно же, без соавторов разделы о статистике и физике никуда не годятся. В целом значение книги почти исчерпывается выдержками из многочисленных архивных источников.

Эта рецензия является несколько переработанным вариантом первоначальной, опубликованной на английском языке в журнале *Historia Scientiarum*, vol. 16, No. 2, 2006. Рецензия появляется с любезного разрешения редактора указанного журнала.

X

О. Б. Шейнин

Диссертация на соискание степени кандидата физ.-математич. наук

Некоторые вопросы истории теории ошибок

Защищена в 1967 г.
в Институте истории естествознания и техники (Москва)

X.1. Автореферат

Возникновение теории ошибок как дисциплины, относящейся к экспериментальной, количественной науке, связано с бурными успехами инструментальных астрономических наблюдений XVII в. и с началом эпохи градусных измерений (XVII – XVIII вв.). Успехи и новые задачи астрономии поставили разнообразные проблемы обработки и оценки точности инструментальных наблюдений, а вычисление дуг триангуляции и последующие выводы фигуры Земли потребовали кроме того умения обрабатывать избыточные системы алгебраических уравнений. И теория ошибок естественно включила в себя круг задач по обработке и оценке точности непосредственных и косвенных наблюдений. Обработка непосредственных наблюдений привела к обоснованию применения распространённого издавна среднего арифметического, сначала качественному, а затем количественному (вероятностному). Обработка косвенных наблюдений привела к возникновению ряда вычислительных алгоритмов, не зависящих от вероятностных соображений, а затем и принципу наименьших квадратов, который уже у Гаусса обосновывался методом наибольшего правдоподобия.

Нам пришлось ознакомиться с большим числом источников по математике, астрономии и геодезии. Большая часть этой литературы оставалась малоизвестной или вовсе неизученной. Именно этим можно частично объяснить тот факт, что нам удалось получить неожиданные результаты, например

1. Описание работ забытого в Европе американского математика Роберта Эдрейна, который опубликовал два вывода нормального распределения в теории ошибок одновременно с Гауссом.

2. Установление приоритета Эрнста Аббе в рассмотрении распределения хи-квадрат.

3. Первое введение принципа наибольшего правдоподобия Ламбертом.

В литературе по теории ошибок и методу наименьших квадратов широко освещалось обоснование нормального распределения. Для нас эта тема была второстепенна, поскольку её следовало бы рассматривать особо, притом что большое число обоснований оказалось тупиковым и представляют лишь математические упражнения.

Диссертация состоит из трёх глав, приложения и дополнения.

В гл. 1 исследовано раннее применение среднего арифметического в приближённых вычислениях, азартных играх, в астрономии и собственно теории вероятностей. О применении среднего арифметического в глубокой древности было известно давно, но не была отмечена связь этого факта с вероятностным характером этого среднего, а именно на этом сделан упор на протяжении почти всей главы. Кроме того, в ней собран большой фактический материал.

Учение о средних величинах, в том числе о среднем арифметическом, существовало ещё в пифагорейской школе. Это среднее широко применялось в древности при приближённых вычислениях площадей фигур и объёмов тел. Существует мнение о том, что в древнем Вавилоне формулы для подсчёта площади четырёхугольника как произведения полусумм противоположных сторон применялась либо в случае не вполне точных прямоугольников, либо при уклонении противоположных сторон друг от друга вследствие различного воздействия рельефа местности на результаты измерения (А. А. Вайман). Но это означает, что среднее арифметическое было призвано компенсировать нестрогость применяемых формул (моделей) и систематических ошибок измерений. Обе эти цели преследуются и ныне, но относительно случайных ошибок.

Распространению идеи о среднем арифметическом способствовала практика экономических отношений; утверждали даже, что в этом смысле сфера экономики первична. Лейбниц назвал принцип равного учёта равноценных предположений основой (современных ему) построений в теории вероятностей. Мы полагаем, что он имел в виду происхождение вероятности и ожидания, и что эта мысль таила в себе возможность обнаружившегося позднее субъективного понимания вероятности.

В истории азартных игр существуют свидетельства распространённости идеи среднего арифметического как некоей интуитивной статистической и быть может вероятностной характеристики совокупности исходов и быть может ожидания[2].

В эпоху градусных измерений (XVII – XVIII вв.) среднее арифметическое стало применяться как универсальная оценка на всех стадиях их обработки. Тогда же и даже раньше были высказаны первые качественные утверждения о предпочтительности выбора среднего арифметического при обработке измерений (Коперник, Кеплер, Пикар, Кондамин).

В 1809 г. Гаусс постулировал принцип среднего арифметического и существенно использовал его при выводе нормального распределения. Этот постулат привлёк внимание, и ряд авторов попытался свести его к более очевидным предпосылкам. Впрочем, эти попытки носили чисто детерминированный характер, и мы на них не останавливаемся.

В начале XVIII в. Коутс обосновывал среднее арифметическое аналогией из механики (центр тяжести), а Ламберт вероятностно обосновывал это среднее.

В гл. 2 в связи с историей обработки непосредственных измерений изучены сочинения Галилея, Ламберта, Симпсона и Лагранжа. Также рассмотрены оценки с апостериорными весами и наибольшего правдоподобия и отбраковка измерений, уклоняющихся от среднего арифметического.

Галилей впервые сформулировал ряд основных понятий теории ошибок. Основным предшественником Гаусса в теории ошибок был Ламберт, который заложил её фундамент. Непосредственной целью статьи Симпсона было опровержение мнения *весьма известных лиц* о том, что одному тщательному наблюдению можно доверяться в той же мере, как и среднему из их большого числа. Соответственно, изучение сочинений Флемстида и Брадлея показало, что они не придерживались указанного мнения. Последнее было, видимо, вызвано бурными успехами техники наблюдений и не оставило длительного следа в истории экспериментальных наук.

Описан и комментирован мемуар Лагранжа о вероятности погрешности среднего арифметического при различных предположениях о погрешностях измерений. Как и Симпсон, он применял производящие функции (даже при непрерывных распределений и тем самым предвосхитил введение характеристических функций.

Оценки с апостериорными весами можно рассматривать как исторический аналог наилучших линейных оценок Ллойда. Они неоднократно предлагались начиная со второй половины XVIII в. (Шорт, Пингре, Эйлер, Де Морган, Ньюком, К. Ф. Огородников). Иногда введение подобных весов обосновывалось необходимостью учёта изменений параметров закона распределения ошибок измерений во времени. Тем не менее, эти

веса лишь вводят поправку к среднему арифметическому за уклонение измерений от попарной симметричности.

В связи с возможностью *необычного* выбора возрастающих к краям (кратко: возрастающих) апостериорных весов, при котором, кстати, не нужно думать об отбраковке наблюдений, мы рассмотрели мемуар Даниила Бернулли 1778 г. Он резко критиковал среднее арифметическое, считая его пригодным лишь при равномерном распределении, когда допустима *стрельба вслепую* и предложил оценку наибольшего правдоподобия (кривая плотности – дуга параболы). Фактически это привело к оценке с возрастающими апостериорными весами. Это должно было бы казаться неприемлемым, однако Эйлер в своём комментарии ошибочно посчитал, что апостериорные веса у Д. Б. убывали.

Показана общность схемы применения принципа наибольшего правдоподобия у Эдрейна (1809) и Гаусса (1809) для вывода принципов наименьших квадратов и среднего арифметического и рассмотрено обоснование принципа наибольшего правдоподобия принципом обращённой вероятности. Последним пользовались Лаплас, Гаусс и Фишер.

Подробно рассмотрена история отбраковки наблюдений, которую рекомендовал Галилей и систематически применял Ламберт. Вероятностные критерии отбраковки неизбежно появились, правда, лишь во второй половине XIX в., ввиду стремления избежать произвола при отбраковке и расширения круга приложений теории вероятности. Их, впрочем, задержала фетишизация нормального распределения, который допускал появление любой погрешности, и мнение Гаусса, который очень осторожно относился к отбраковке.

Первые вероятностные критерии отбраковки измерений (Пирс, Шовене и др.) были основаны на непосредственном подсчёте (по нормальному закону) вероятностей *за* и *против* сомнительных наблюдений и вызвали длительную полемику, в ходе которой были высказаны соображения, по существу совпадающие с представлениями математической статистики об ошибках первого и второго рода: лучше пожертвовать несколькими быть может доброкачественными наблюдениями, но зато обезопасить себя от опасного влияния крупных ошибок. Вопреки Гауссу, эти вероятностные критерии отбраковывали крупные ошибки вне зависимости от их происхождения. Погрешность критериев, возникающая ввиду малой анормальности распределения ошибок наблюдения, так и не была исследована.

За последние 20 – 30 лет был предложен ряд *статистических* критериев, (например, Н. В. Смирновым), которые используют выборочные статистики с точно известными распределениями.

Однако, устойчивость этих критериев, проблема применения *крепких* тестов, также не исследована.

В конце главы отмечено, что количественная оценка точности стала производиться сравнительно поздно. За исключением Ламберта, который к тому же нормировал свою меру точности, а потому не мог непосредственно сравнивать точность различных серий измерений, никто до Гаусса (1821) не пользовался никакими мерами точности. Впрочем, мы нашли нормированную оценку точности и у Деламбра (период 1818 – 1822).

В гл. 3 изучена история математической обработки косвенных измерений (решение переопределённых систем линейных алгебраических уравнений, в основном при помощи тех или иных дополнительных условий, налагаемых на остаточные свободные члены v_i системы).

Для распространённого случая двух неизвестных (особо: параметров земного эллипсоида вращения) рассмотрено применение попарных сочетаний измерений (условие: $v_i = 0$) вплоть до 1827 г. Обнаружено применение этого метода при обработке непосредственных измерений с последующим выводом среднего арифметического из сочетаний (Бошкович). Сочетания он, видимо, применял для качественной оценки точности измерений и, возможно, для того, чтобы пользоваться единым методом при обработке непосредственных и косвенных измерений.

Прослежена связь методов попарных сочетаний и средних (условие: $\sum v_i = 0$). Тобиас Майер (1750) решал систему из 27 уравнений с тремя неизвестными и обосновал свой способ, обобщённый способ средних, практической невозможностью составления всевозможных сочетаний уравнений по три. Условие метода средних естественно воспринималось как вытекающее из равной вероятности ошибок каждого знака, которое в случае непосредственных наблюдений приводило к арифметической средине.

Описан способ обработки градусных измерений Бошковичем. Не удовлетворившись методом сочетаний, он предложил условия

$$\sum v_i = 0,\ \sum |v_i| = \min,$$

которые впоследствии применил и Лаплас.

Дополнена несколькими замечаниями история применения метода минимакса

$$\max |v_i| = \min,$$

где минимум берётся относительно всех возможных решений системы. А. А. Гусак проследил применение этого метода вплоть до чебышёвской задачи о наилучшем на заданном отрезке приближении аналитической функции многочленом данной степени. Мы заметили, в частности, что Эйлер впервые применил метод минимакса в 1749 г. (а не в 1778 г.).

В своей *первой методе* Гаусс (1809) обосновывал принцип наименьших квадратов выведенным им нормальным распределением случайных ошибок наблюдений. Однако, вывод зависел от введённого Гауссом постулата, а именно тем, что среднее арифметическое является наилучшей оценкой непосредственных наблюдений, притом совпадающей с оценкой наибольшего правдоподобия.

В 1821 г. Гаусс предложил второе обоснование принципа наименьших квадратов принципом наибольшего веса. Это новшество заставило Гаусса отказаться от своего первого определения меры точности наблюдений, поскольку оно зависело от допущения нормального распределения.

Принцип максимума веса при обработке конечных рядов измерений был известен ещё Лапласу. Он считал, что оптимальный результат соответствует максимальному весу, а вес обратно пропорционален сумме квадратов v_i. Но в то же время Лаплас определял вес как положительный параметр k закона типа $\exp(-kx^2)$. Условие его максимума сводилось к наименьшей вероятности ошибок, либо к наименьшей длине *доверительного интервала*. Таким образом, Лаплас не смог отказаться от нормального распределения в качестве универсального.

Всё же мы подчёркиваем бОльшую близость идей Лапласа и Гаусса, чем обычно признаётся в литературе. Общность интересов позволила каждому из них опираться друг на друга (или лучше понять свои собственные мысли).

В приложении мы приводим краткие биографические сведения об американском математике Роберте Эдрейне (1775 – 1843) и подробно рассматриваем его работы в теории ошибок. Мы также прослеживаем близкие позднейшие выводы нормального распределения.

В 1809 г. он опубликовал статью, в которой содержалось **1.** Два вывода нормального распределения случайных ошибок измерения. **2.** Вывод принципов наименьших квадратов и среднего арифметического. **3.** Определение вероятнейшего положения судна по известному счислимому месту и наблюдению широты. 4. Уравнивание замкнутого буссольного хода.

В 1818 г. Эдрейн опубликовал две статьи, посвящённые выводу фигуры и размеров Земли. По данным Лапласа Эдрейн применил принцип наименьших квадратов к определению сжатия земного эллипсоида и получил значение 1/319.
Во второй статье Эдрейн получил очень хорошие для своего времени данные о размере Земли.

По своим результатам в описанной области Эдрейн, разумеется, не сравним с Гауссом, и тем менее сравним по своему влиянию: они остались почти неизвестными.

В дополнении сделана попытка набросать общий очерк истории теории ошибок и, в частности, выяснить причину существования двух вариантов этой теории, математико-статистического и астрономо-геодезического.

X.2. Ранняя история среднего арифметического

Идея возможного и вероятного не была чужда древним. Однако, начиная с Аристотеля считалось, что вероятностное, случайное поведение присуще лишь наземным процессам. Чем ближе нечто к совершенству, тем проще и регулярнее его движение (как у небесных тел) [1; 2, кн. 5, с. 161 – 164]. Эта точка зрения удерживалась прочно. Ещё Кеплер [3] называл случай *поношением всевышнего*, а начиная с Фомы Аквинского случай надолго стал считаться результатом незнания [4].

Примечательно, что вероятностные рассуждения издавна применялись в юриспруденции. Сократ [201] писал, что

В судах никто не заботится о правде, а только о вынесении приговоров, а это основано на вероятностях[1].

Разумеется, в те времена вероятность понималась не как количественная мера возможного, а лишь как синоним предположения, основанного той или иной степенью уверенности.

Прибежищем идей случайного была область приближённых вычислений, относившаяся в древней Греции со времён Платона к низшей, *наземной* науке, которой нет места в научной математике.

1. И всё же среднее арифметическое могло сохранить в этой низкой области какой-то ореол чистой науки: среднее из двух отрезков (также из двух чисел) определяет радиус окружности, диаметром которой служит сумма данных отрезков. Окружность же – траектория движения самых совершенных в мире объектов, небесных тел. [5].

В пифагорейской школе существовало учение о средних величинах, в том числе средних (арифметическом, геометрическом и гармоническом) [6, ч. 1, с. 63]. Среднее арифметическое встречается в самых разнообразных формулах для приближённого вычисления площадей фигур и объёмов тел, и можно считать, что оно применялось для компенсации нестрогости формул (моделей), либо неточности измерений, либо для обеих этих целей. В индийском математическом трактате [7, с. 97] при подсчёте объёмов земляных работ рекомендовалось измерять длину, ширину и глубину выемки в нескольких местах, вычислять три средних арифметических и перемножать их. В комментарии XIV в. указывалось:

Чем больше этих мест, тем ближе к истине будет средняя мера и тем точнее будет последующее вычисление.

Лишь в начале XVIII в. подобные утверждения были формализованы и привели к открытию закона больших чисел.

Известно и широкое применение приближённой формулы для подсчёта площади четырёхугольника как произведения полусумм его противоположных сторон. Вайман [8, с. 204] полагает, что так *довольно часто* поступали в случае не вполне точных прямоугольников, либо для компенсации неравного воздействия рельефа на линейные измерения.

Если Вайман прав, то уже в Вавилоне результаты вычислений считались зависящими от условий измерений, а среднее применялось для исключения их ошибок. Сохранилась и эта цель, и предыдущая. Пример: многократные измерения угла в триангуляции ослабляют не только погрешности собственно измерений, но и действие боковой рефракции, потому что формула прямолинейного распространения света заведомо неверна.

2. По мнению Лурье [9] среднее арифметическое из цен, назначаемых продавцом и покупателем, да и вообще из оценок, предлагаемым двумя сторонами, было чрезвычайно распространено:

Именно в этом определении истинных размеров предмета […] *мы должны искать зародыши позднейших приближённых вычислений*.

Эта практика *восходит к глубочайшей древности*. И вот Лейбниц [10, 1704/1936, с. 504 – 505]:

Основой всех этих теоретических построений [в теории вероятностей] *является так называемый простаферезис, т. е. берут среднее арифметическое между несколькими одинаково приемлемыми предположениями. Наши крестьяне, следуя природной математике, уже давно пользуются этим методом*.

(Стоимость земельного участка принималась равной среднему из оценок трёх групп оценщиков.) И далее:

Это аксиома aequalibus aequalia равно принимать в расчёт равноценные предположения.

В этом же контексте он (как и Сократ, см. выше) упоминает о правовых вопросах:

Имеются доказательства, так сказать, более, чем наполовину. Когда тому, кто основывается на них, дозволительно дополнять их под присягой – это juramentum suppletorium. Имеются другие доказательства менее, чем наполовину, где, наоборот, присягать разрешается тому, кто отрицает факт, чтобы очиститься от сомнения – это juramentum purgationis.

Можно полагать, что среднее арифметическое широко употреблялось как до-математическое понятие и затем перешло в приближённые вычисления и в теорию отношений (пифагорейская школа, см. § 1).

3. В истории азартных игр можно найти свидетельства распространённости идеи среднего арифметического, которое (см. ниже) считалось некоей интуитивной естественной характеристикой совокупности исходов и быть может ожидания.

Кардано [11, с. 214] использовал среднее из возможных крайних значений для обоснования правил карточной игры primero. Правила эти Кардано не разъясняет, но указывает:

Это среднее составлено из крайних значений, не как в судебных процессах, при оценке недвижимого имущества и т. п.

Здесь косвенно подтверждается высказывание Лейбница (§ 1). Далее Кардано (с. 240 – 241) вычисляет среднее арифметическое (3,5) число очков при выпадении кости и замечает (но правил игры снова не разъясняет),

Что для наибольшего числа бросков оно (число очков) *окажется* (тем не менее) *меньшим трёх*.

Это непонятно. Оре [11, с. 170] заметил, что Кардано широко пользовался умозаключением о среднем (число наступления события равно произведению числа испытаний на вероятность события), притом иногда ошибочным образом.

Кардано рассмотрел и игру в астрагалы (оцифровка 1, 3, 4, 6 на каждом из подбрасываемых четырёх). Среднее – 14 очков (с. 283), и если 1 выпадает более, чем на одном астрагале, это среднее не достигается, а бросок называется *собакой*.

Игроки, стало быть, выделяли среднее число очков. Но сравнительно сложные правила многих азартных игр видимо препятствовали разработке комбинаторики и развитию идеи о вероятности. Так, для астрагалов учитывались и составляющие суммы очков.

Галилей [12] утверждает, что по наблюдению игроков 10 или 11 очков при броске трёх костей выпадают чаще, чем 9 или 12. Возможно, конечно, что мнение игроков было интуитивным, однако, обозначая указанные два случая через A и B соответственно,

P_1 (A|A или B) = 27/52, P_2(B|A или B) = 25/52.

Разность вероятностей, 1/26 = 0,0385, не могла служить непреодолимым препятствием её статистического обнаружения.

4. В узком смысле термин *простаферезис* (§ 2) в астрономии обозначал не собственно среднее арифметическое, а разность между средним (центром деферента) и истинным (на эпицикле) положением планеты [13]. Геоцентрическая система мира сравнительно доступно объясняла известные факты, что оказалось возможным именно ввиду выделения среднего движения (деферентов) и исследования истинного движения относительно этого среднего.

Много позднее Коперник [14, кн. 2, гл. 3] прямо указывал:

При всяком […] *неравномерном движении надлежит рассматривать некоторое среднее, при помощи которого можно определить степень неравномерности*.

При этой методике для определения положения центра эпицикла требовалось вычислять среднее арифметическое из двух *крайних* положений планеты на эпицикле. Но следует оговориться: деферент и эпицикл обычно заменялись единым эксцентром [15].

В новое время систематические повторные измерения ввёл в астрономию Тихо Браге. И именно примерно тогда же и позже мы находим у многих авторов видимо впервые осознанную необходимость сказать несколько слов о среднем арифметическом как о принципе, не говоря уже о самОм факте его употребления (Снеллиус [16, с. 175 – 176], Мопертюи [17, с. 240 – 247] и в сущности все участники градусных измерений).

5. Коперник [14, кн. 6, гл. 7] утверждал, что если

Между крайними пределами измерений нет заметной разницы, безопаснее придерживаться средних.

Кеплер [18, гл. 10. § 10] определял прямое восхождение Марса и принял среднее арифметическое – *среднее по добру и справедливости*. Да и в формулировке своего третьего закона движения планет Кеплера участвуют средние расстояния планет от Солнца (полусуммы расстояний в афелии и перигелии).

Пикар [19, с. 330, 335, 348] несколько раз назвал среднее арифметическое истинным (véritable) результатом. Кондамин [20, с. 223] утверждал, что

Приняв среднее, мы почти не рискуем ошибиться, даже если некоторые наблюдения имеют значительные дефекты. Медиану никто в то время не упоминал.

В 1809 г. принцип среднего арифметического постулировал Гаусс, назвав его вероятнейшим и наиболее надёжным. Вероятнейшее значение ныне называется модой. По закону больших чисел среднее арифметическое сходится по вероятности к ожиданию параметра сдвига плотности вероятности, которое не обязательно совпадает с модой. Гаусс, видимо, имел в виду одновершинные симметричные плотности, для которых мода и ожидание совпадают, и только такие плотности соответствуют сформулированным Гауссом свойствам случайных ошибок измерений.

Ряд авторов пытался доказать постулат среднего арифметического (свести его к более очевидным предпосылкам) при помощи детерминированных рассуждений. Сводку этих попыток привели Уиттекер и Робинсон [21] (и добавили к ней свою собственную попытку, но их предпосылки по необходимости усилил Зох [22]). Содержательная сторона такого рода исследований послужила началом современной теории инвариантных статистических критериев и оценок. Впрочем, с теорией ошибок она связана лишь косвенно.

В 1845 г. Гаусс снова остановился на преимуществе среднего арифметического в научно-популярном контексте (*Werke*, Bd. 4, с. 143).

6. Коутс [23] уделил несколько строк среднему арифметическому. В целом его сочинение было посвящено изучению действия погрешностей в астрономии и геодезии и видимо не было случайным в его творчестве. Во всяком случае, заслуга Ньютона, с которым Коутс творчески общался и который высоко ценил Коутса, в определении фигуры Земли хорошо известна.

Сочинение Коутса содержит 28 теорем о погрешностях вычисляемых элементов прямолинейных и сферических треугольников, возникающих ввиду погрешностей их измеренных элементов. В то время подобное исследование было актуальным.

Непосредственно интересующее нас рассуждение Коутса таково:

Пусть p – положение какого-то предмета, определённое из первого наблюдения, q, r, s – положения того же предмета из последующих наблюдений; пусть кроме того P, Q, R, S – веса, обратно пропорциональные расстояниям, на которые могут рассеиваться ошибки, проистекающие из отдельных наблюдений

и которые [расстояния] *могут быть получены из данных о пределах ошибок.*

Будем считать, что веса [...] *соответствуют точкам положений p, q, r, s; найдём их центр тяжести Z; я утверждаю, что точка Z будет наиболее вероятным положением предмета, которое с наибольшей вероятностью может считаться его истинным положением.*

Котс приложил рисунок (возможно представлявший трёхмерную картину), на которой, однако, были указаны только 4 точки. Он не разъяснил своего понимания *наиболее вероятного* и не привёл примеров. Тем не менее, Лаплас [24, с. 862, левый столбец] заявил, что

Коутс рекомендовал составить условные уравнения так, чтобы коэффициент неизвестного элемента был в каждом из них положительным и затем сложить все эти уравнения, чтобы составить конечное (нормальное) *уравнение* […].

Там же Лаплас засвидетельствовал, что правилу Коутса *следовали все вычислители*.

7. Ламберт [25, § 320] заметил, что среднее арифметическое *вообще самое безопасное* при равной возможности ошибок в каждом наблюдении. Он [26 § 3] повторил это утверждение и добавил, что среднее арифметическое

Расположено тем ближе к истинной величине, чем больше произведено наблюдений.

И далее (§ 4): наблюдение, наиболее уклоняющееся от истины, наиболее уклоняется и от среднего арифметического и обратно. Оба эти утверждения верны лишь в вероятностном смысле. В [25, § 441] Ламберт указывает, что выбор среднего основан на *наибольшей вероятности*. Все эти утверждения по существу опираются на §§ 443 – 445 того же сочинения, где Ламберт пытается оценить погрешность среднего арифметического. Впрочем, численная оценка отсутствует, поскольку он исходит из качественных соображений, а не из какого-нибудь распределения ошибок.

8. Остановимся на роли *аксиомы* Лейбница (§ 2) в истории собственно теории вероятностей. В контексте он лишь говорит о том, что *установлены некоторые общие принципы* этой теории и конкретно упоминает лишь де Витта, но Лейбниц видимо имел в виду вероятность и ожидание.

Впоследствии Кант [27, с. 3] определил вероятное как нечто, имеющее вероятность, превышающую половину (т. е. бОльшую, чем среднее невозможного и достоверного).

Уместно отметить, что мысль Лейбница таила в себе возможность обнаружившегося позднее субъективного понимания вероятности, её установления субъективной степени достоверности. И вот определение Маркова из второго издания (1908 г.) его *Исчисления вероятностей*:

Два события мы назовём равновозможными, если нет никаких оснований ожидать одного из них предпочтительнее перед другим.

Правда, в третьем издании Марков отметил нестрогость своего определения, но лучшего он так и не дал.

Библиография и примечания

источники, опубликованные после 1967 г., естественно не были включены в то время

1. Sambursky S., On the possible and probable in ancient Greece. *Osiris*, vol. 12. 1966, с. 35 – 48. Перепечатка в книге Kendall M. G., Plackett R. L., редакторы, *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London, 1977, pp. 1 – 14.

2. Боэций, 1474, *Утешение философское*. СПБ, 1794.

3. Гнеденко Б. В., Теория вероятностей и познание реального мира. *Успехи математических наук*, т. 5, № 1 (35), 1950, с. 3 – 23.

4. Kendall M. G., The beginnings of a probability calculus. *Biometrika*, vol. 43, No. 1 – 2, pp. 1 – 14. Перепечатка в книге Pearson E. S., Kendall M. G., редакторы, *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 1. London, 1970, pp. 19 – 34.

5. Никомах из Герасы; Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic*. В книге *Great Books of the Western World*, vol. 1, pp. 811 – 848. Сборник из 54 томов с тем же названием: Chicago, 1952.

6. Маковельский А. О., *Досократики*. Казань, 1914.

7. Colebrooke H. T., переводчик, *Algebra and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. London, 1817, 2013.

8. Вайман А. А., *Шумеро-Вавилонская математика третьего – первого тысячелетия до н. э.* М., 1961.

9. Лурье С. Я., К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию. *Архив истории науки и техники*, сер. 1, № 1, 1933. Также в книге *Избр. работы по истории науки*. СПБ, 2016, с. 51 – 75.

10. Лейбниц Г. В., 1704, нем., *Новые опыты о человеческом разуме*. М. – Л., 1936.

11. Cardano, *Book on Games of Chance*. В книге Ore O., *Cardano, the Gambling Scholar*. Princeton, 1953.

12. Галилей Г., 1718, итал., Рассуждение об игре в кости. На англ. яз. в книге David F. N., *Games, Gods and Gambling*. London, 1962, pp. 192 – 195.

13. Романовский В. И., Ошибок теория. БСЭ, второе издание, т. 31, 1955, с. 500 – 501.

14. Коперник Н., 1543, латин., *О вращениях небесных сфер*. М., 1964.

15. Идельсон Н. И., Этюды по истории планетных теорий. В книге *Ник. Коперник. Сб. статей к 400-летию со дня смерти*. М. – Л., 1947.

16. Snellio W., *Eratosthenes Batavus de terrae ambitus vera quantitate*, 1617.

17. Maupertuis P. L. M., Memoir read before the Roy. Acad. Sci. Nov. 13, 1737, On the measure of a degree of the meridian. В книге *Gen. Collections of Voyages*, vol. 1. London, 1808.

18. Kepler J., 1609, латин., *New Astronomy*. Cambridge, 1992, 2015.

19. Picard J.; Observations astronomiques […] *Mém. Acad. Roy. Sci. 1666 – 1699*, t. 7, 1729, pp. 329 – 347.

20. Condamine C. M. de la, *Mesure des trois premieres degrés du méridien*. Paris, 1751.

21. Уиттекер Э., Робинсон Г., 1924, англ., *Математическая обработка результатов наблюдений*. М., 1933.

22. Zoch R. T., On the postulate of the arithmetic mean. *Annals Math. Stat.*, vol. 6, No. 4, 1935, с. 171 – 182.

23. Cotes R., *Aestimatio errorum in mixta mathesi* […], 1722. *Opera misc*. London, 1768. В книге Gowing R., *Roger Cotes – Natural Philosopher*. Cambridge, 1983.

24. Лаплас П. С., 1814, франц., *Опыт философии теории вероятностей*. В книге Прохоров Ю. В., редактор, *Вероятность и математическая статистика. Энц*. М., 1999, с. 834 – 863.
25. Lambert J. H., *Photometria*, 1760.
26. ---, Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche. В книге автора *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Bd. 1. Berlin, 1765, pp. 1 – 313.
27. Мизес Р., 1928, нем., *Вероятность и статистика*. М., 1930, 2009.
28. Марков А. А., Закон больших чисел и способ наименьших квадратов, 1899. *Избр. тр.*. Без места, 1951.

Примечания

Общее примечание: Ту же тему мы описывали в нескольких параграфах своей монографии Шейнин (2019), притом рассмотрели применение среднего и средних в естествознании.

1. См. там же, § 9.9.1 об исследованиях Пуассона.

Шейнин О. Б., *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин, 2019. **S, G,** 11.

X.3. Приложение: О работах Роберта Эдрейна по теории ошибок

Американскому математику, ирландцу по рождению, Роберту Эдрейну (1775 – 1843) принадлежат выдающиеся исследования по теории ошибок. Одновременно с Гауссом он опубликовал вывод нормального распределения ошибок измерений и применил это распределение к установлению принципов наименьших квадратов и среднего арифметического, а позднее к оценке сжатия земного эллипсоида.

1. Эдрейн родился в Ирландии [1; 2] и умер в Нью-Брансуике (США). Математическое образование получил в основном самостоятельно и рано начал преподавать. Приняв участие в ирландском национально-освободительном движении и будучи ранен в восстании 1798 г., Эдрейн вынужденно эмигрировал в США, где и провёл все оставшиеся годы.

С 1809 г. он профессор математики в Куиннс-колледже в Нью-Брансуике, в 1813 – 1826 гг., профессор математики Колумбийского, а в 1827 – 1836 гг. – Пенсильванского университета (в 1828 – 1836 гг., вице-ректор). Эдрейн вёл курсы по весьма разнообразному циклу дисциплин. Так, в 1829 г. он читал лекции по элементарной математике, геодезии, картографии, математическому анализу, механике и астрономии.

Наряду с Нафанаилом Боудитчем [3], Эдрейн был одним из первых американских математиков. В 1812 г. его избрали в Американское философское общество, а в 1813 г. – в Академию наук и искусств. Он активно сотрудничал в первых математических журналах США.

Работы Эдрейна описал Кулидж [2], однако заслуги Эдрейна в истории теории ошибок он осветил недостаточно подробно.

Более подробно, но также явно недостаточно, об этих заслугах сообщается лишь в геодезической литературе XIX в. Но его не упоминают ни Стройк [4], ни Штрассер [5], ни многие авторы обзорных трудов по истории математики. Исключением служит, кажется, лишь американский историк математики Кеджори [6], уделивший Эдрейну несколько строк.

Мы, видимо впервые полностью изложили и связали с позднейшими исследованиями результаты Эдрейна в теории ошибок. Его отправным пунктом явилась задача, которую поставил профессор Пенсильванского университета Роберт Паттерсон (1787 – 1854):

Чтобы определить меру куска земли, я измерил обычной буссолью и мерной цепью азимуты и длины линий его [куска земли] нескольких сторон. Но при подсчёте приращений координат я обнаружил, что в измерениях содержится некоторая погрешность. Требуется вычислить площадь этого замкнутого куска земли при вероятнейшем предположении об указанной погрешности. […] *Вероятности поправок приращений координат должны быть максимальными*.

Далее задача формулировалась в числовом виде. За её решение была объявлена награда, которую Эдрейн, как редактор журнала, присудил Боудитчу. Статья Боудитча была опубликована непосредственно перед статьёй Эдрейна [7], которая содержала

1. Два вывода нормального закона распределения случайных ошибок измерений.

2. Вывод принципа наименьших квадратов и принципа среднего арифметического в одномерном и трёхмерном случаях.

3. Определение вероятнейшего положения судна по известному счислимому месту и наблюдению широты.

4. Решение задачи Паттерсона.

В конце статьи Эдрейн утверждает, что за недостатком места он не приводит свой вывод вероятнейшего значения сжатия земного эллипсоида на основе нормального закона, см. ниже.

2. Первый вывод нормального распределения относился к погрешностям линейных измерений. Эдрейн принял, что эти погрешности пропорциональны длинам линий, что соответствовало систематическим ошибкам. Кроме того, он почему-то решил, что полная погрешность двух смежных отрезков одной и той же прямой постоянна, а при выводе он дифференцировал указанные погрешности по неназванной переменной. Всё это означает, что его вывод никуда не годится.

Во втором выводе рассматривается определение пункта (B) по измерению расстояния AB от данного пункта A и азимута этой прямой. Эдрейн вводит другие отнюдь не самоочевидные

предположения и снова дифференцирует погрешности по неназванной переменной.

Ни в одном выводе Эдрейн не отыскивал значений констант получаемых кривых, не ввёл никакого понятия о дисперсии и не вывел законов распределения. Он мог ввести понятие о двумерном нормальном распределении и более подробно изучить отмеченное им множество равновероятных положений точки, а именно классического эллипса ошибок.

Мерримен и последующие авторы заметили, что вывод нормального закона распределения случайных ошибок у Дж. Гершеля аналогичен второму выводу Эдрейна. Кулидж [2] по возможности исправил выводы Эдрейна, но, конечно же, не смог заменить негодные предпосылки своего предшественника.

Принципы наименьших квадратов и среднего арифметического Эдрейн вывел на основе принципа наибольшего правдоподобия, по сути так же, как Гаусс. Неясно, прочёл ли Эдрейн уже тогда мемуар Лежандра: Кулидж заметил, что этот мемуар хранился в библиотеке Эдрейна, но с каких пор?

3. Исправление счислимого места было аналогично решению задачи Паттерсона, но наблюдение только широты привело к появлению только широтного совпадения счислимого и обсервованного места. Это соответствовало уравниванию замкнутого буссольного хода только по одной координате.

Уравнивание буссольного хода было примечательно тем, что Эдрейн отыскивал поправки в непосредственно измеренные величины, а не в их зависимые друг от друга функции (приращения координат).

4. Для вывода сжатия земного эллипсоида $\alpha = (a - b)/b$, где a и b полуоси эллипсоида, Эдрейн воспользовался данными Лапласа [8] о наблюдениях ускорения силы тяжести, а точнее, о длинах секундных маятников в различных широтах. В обозначениях Эдрейна формула Клеро, связывающая широту φ с ускорением силы тяжести r, имеет вид

$$r = x + y\sin^2\varphi,$$

где параметры x и y определяют искомое α. Систему уравнений такого вида Эдрейн решал при условии

$$\sum v_i^2 = \min,\ v_i = x + y\sin^2\varphi_i - r_i$$

и окончательно получил $\alpha = 1/319$. Это тривиальное ныне приложение принципа наименьших квадратов было первым в рассматриваемой нами области [9]. Кроме того, он обнаружил

две грубые ошибки в вычислениях Лапласа, у которого α = 1/335,78. Лаплас исходил из условий

$$\sum|v_i| = \min, \sum v_i = 0.$$

Полагая удобным для практики считать Землю шаром, Эдрейн отыскивал его радиус при семи различных условиях: равенство объёмов или площадей поверхностей с эллипсоидом вращения, равенство масс, ограниченных этими поверхностями при определённом законе убывания масс с глубиной и пр. В первом приближении Эдрейн получил во всех случаях один и тот же результат: $r = (2a + b)/3$.

Он, далее, указывает: он определил

Вероятнейшие оси земного эллипсоида по измерениям градуса меридиана по [своему методу 1809 г.]. *Средний* (mean) *радиус оказался равным* 3959,36 *англ. миль*.

Происхождение этой оценки неизвестно. При α = 1/319 оказывается, что *a* = 3963,50 англ. миль = 6378,629 *м* (при 1 *м* = 39,370113 *дюйма*).

Вот некоторые определения параметров земного эллипсоида [10] с добавлением результатов Эдрейна; в [10] было принято α = $(a – b)/a$, но соответствующее расхождение не существенно.

Деламбр, 1800	*a* = 6375,653 *км*;	1/α = 334
Эдрейн, 1809	78,629	319
Дальбек, 1819	76,896	302,78
Красовский, 1940	78,245	298,3

5. Вкратце остановимся на выводе нормального закона у Гаусса и последующих учёных. О Гауссе всё вроде бы известно, но мы добавим: свойства случайных ошибок он в своём выводе применил только косвенно, посредством постулата арифметической средины.

Гершель рассматривал свободное падение мяча на горизонтальную плоскость и его уклонения от метки, над которой он находился. Он чётко постулировал убывание и чётность искомой плотности ввиду *полного незнания причин погрешностей и характера их действия*. Это – иллюстрация распространённого мнения о том, что теория вероятностей будто бы может обеспечить какое-то положительное знание, исходя из полного незнания.

Томсон и Тейт без ссылок привели весьма схожее доказательство. Вероятность падения камня на отрезке $[x, x + dx]$ они обозначили через $\varphi(x^2)dx$, а вероятность его падения в точке (x, y) приняли равной $\varphi(x^2)\varphi(y^2)dxdy$. При повороте системы

координат на некоторый угол окажется, что $\varphi(x^2)\varphi(y^2) = \varphi(x_1^2)\varphi(y_1^2)$ и далее без доказательства хорошо известного к тому времени результата, утверждается, что $\varphi(x^2) = A\exp(mx^2)$, где $m < 0$ *так как вероятность большой погрешности весьма мала*.

Ту же схему доказательства приняли Цингер и Крылов, которые рассматривали стрельбу по вертикальной мишени. Доказательство Крылова (и тем самым и предыдущих авторов) критиковал Кемниц [11]. Он заметил, что Крылов не использовал свойств случайных ошибок и что, в частности, убывание полученной функции с неизвестным ещё параметром следует из общих свойств функции плотности. Впрочем, сам Крылов не считал свой вывод строгим.

Доказательство Томсона и Тейта неполноценно. В случае невырожденного двумерного распределения само существование двух систем координат, в каждой из которых вероятность сложного события указанного вида равно произведению координат (независимых!) простых событий достаточно (точнее, необходимо и достаточно) для нормальности данного распределения.

Для своего времени Эдрейн сделал многое. Он вывел экспоненциальную функцию отрицательного квадрата, применил её для обоснования принципов наименьших квадратов и среднего арифметического и решения важных задач, в том числе для вероятностного определения сжатия земного эллипсоида. Он, к сожалению, больше не возвращался к теории ошибок и, в частности, не занялся предварительным расчётом точности измерений или оценки точности, хотя эти вопросы уже рассматривали Мопертюи, Ламберт и др. Он мог бы, например, исследовать оценку точности градусных измерений в духе Лапласа [12]. Но для этого Эдрейн должен был бы уточнить нормировку функции распределения и выяснить смысл её параметров. Большего он, видимо, не смог бы сделать, так как не занимался специально обработкой измерений.

Мы значительно сократили это Приложение, поскольку позднее опубликовали статью [13] (а недавно вновь описали работу Эдрейна [14].

Библиография и примечания

1. *National Encyclopaedia of American Biography*, vol. 1. New York, 1898. *New Century Cyclopedia of Names*. New York, 1954.

2. Coolidge J. L., Robert Adrain and the beginnings of American mathematics. *Amer. Math. Monthly*, 1926, vol. 33, No. 2, pp. 61 – 76. **S, G,** 43.

3. N. Bowditch, 1773 – 1838, американский астроном и математик, член Королевского общества. Более всего известен своими работами по навигации и комментированным переводом на английский язык *Небесной механики* Лапласа.

4. Struik D. J., *Yankee Science in the Making*. New York, 1962.

5. Strasser G., *Ellipsoidische Parameter der Erdfigur, 1801 – 1950. Deutsche geod. Kommiss. Bayer Akad. Wiss.*, A1957, No. 19.

6. Cajory F. C., *History of Mathematics*. NewYork, 1929. Второе издание, p. 382.

7. Позднейшая перепечатка трёх статей Эдрейна в книге без сквозной нумерации: Stigler S. M.; *American Contributions to Mathematical Statistics in the 19th Century*, vol. 1. New York, 1980:

Adrain R., Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations, 1809 (фактическая дата публикации).

--- Investigation of the figure of the Earth and of the gravity in different latitudes, 1818. Ознакомившись безусловно именно с этой работой, Ольберс сообщил Гауссу 24 февраля 1819 г., что *один американец*, ссылаясь на свою прежнюю работу, *приписывает себе* открытие метода наименьших квадратов. Гаусс, видимо, ничего не ответил. См. переписку Гаусса.

--- Research concerning the mean diameter of the Earth, 1818.

Комментарии на статьи Эдрейна:

Крылов А. Н., *Лекции о приближённых вычислениях*. М., 1950, гл. 8.

Цингер Н., *Курс астрономии. Часть теоретическая*. СПБ, 1899.

Abbe C., Historical note on the method of least squares. *Amert. J. Sci. Arts*, 1871, vol. 1, No. 5, pp. 411 – 415.

Dutka J., R. Adrain and the method of least squares. *Arch. hist. ex. sci*., 1990, vol. 41, pp. 171 – 184. (Позднейший источник.)

Hammer E., Beitrag zur Geschichte der Ausgleichungsrechnung. *Z. Vermessungswesen*, 1900, Bd. 29, No. 24, pp. 613 – 628.

Herschel W., Letters on the Theory of Probability […] by A. Quetelet. *Edinb. Rev. Or Critical J*. 1850, vol. 92, No. 185.

Merriman M., List of writings relating to the method of least squares with historical and critical notes, 1882. Перепечатка: Stigler, 1980, см. в прим. 7, также **S, G,** 74.

Thomson W., Tait P. G., *Treatise on Natural Philosophy*. Oxford, 1867, vol. 1. (Cambridge, 2009.)

8. Laplace P. S., *Traité de mécanique celeste*, livre 3. Paris, 1799.

9. Первое опубликованное применение принципа наименьших квадратов к обработке маятниковых наблюдений относится к 1811 г.; Biot J.-B., *Traité élémentaire d'astronomie physique*, t. 3. Paris, 1811. Additions, pp. 167 – 169.

10. Изотов А. А., *Форма и размеры Земли по современным данным*. *Тр. Центр. НИИ геодезии, аэросъёмки и картографии*, 1950, № 73.

11. Кемниц Ю. В., Об одном выводе формулы закона распределения вероятностей случайных ошибок измерений. *Тр. Моск. ин-та инж. землеустройства*, 1959, № 3.

12. Laplace P. S., Deuxième supplément à la *Théor. anal. prob*. Paris, 1818.

13. Шейнин О. Б., О работах Р. Эдрейна в теории ошибок. *Историко-математические исследования*, 1965, № 16, с. 325 – 336.

14. --- *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин, 2019. **S, G,** 11. См. § 10A.1.3.